

分散が超短パルスに及ぼす影響

The Effect of Dispersion on Ultrashort Pulses

時間領域においてガウシアンパルスの電場は、搬送周波数 ω_0 、パルス幅 Δt 、および位相 $\theta(t)$ により以下の式が成り立ちます。

$$E(t) = \sqrt{A_t} e^{-\ln 2 \left(\frac{2t}{\Delta t} \right)^2} e^{-i(\omega_0 t + \theta(t))} + c.c. \quad (1)$$

この式において $c.c.$ は複素共役を表しています。 A_t はパルス振幅であり、 ω_0 はパルスの波長域、 Δt は最小パルス幅およびそれに伴ってパルス帯域幅を決定し、 $\theta(t)$ はパルス帯域幅に含まれる周波数成分の時間的な関係を決定します。 $\theta(t)$ はパルス幅を変更する際には重要な値です。分散材質で起こるパルスの広がりはこの値次第で、ガウシアンエンベロープに複合的なパルス幅を発生させる役割であると考えることができます。

ガウシアンパルスの式(1)は時間領域におけるパルスの概念を考える際に、直感的に分かりやすい式です。しかし、分散材質を通過するパルスを時間領域で取り扱う際には問題の多い式でもあります。たとえば、ある分散材質を通過した後のパルス幅を求めるにはコンボリューション積分を解く必要がありますが、この式は一般に数値的な計算しか出来ません。しかし、コンボリューションがフーリエ変換の積に帰着することを利用すれば、このタイプの問題は周波数領域で取り扱うのが便利であることが分かります。

時間と周波数は、位置および運動量情報とともにフーリエペア²として知られている変数クラスを表します。フーリエペアはフーリエ変換を介して相互に結び付けられる量です。式(1)をフーリエ変換すると次式が得られます。

$$E(\omega) = \sqrt{A_\omega} e^{-\ln 2 \left(\frac{2(\omega - \omega_0)}{\Delta\omega} \right)^2} e^{-i\phi_{pulse}(\omega - \omega_0)} \quad (2)$$

(簡単にするために負の周波数成分は省略してあります)。この変換により電場は周波数 D の関数として表現され、 Dt は不確定な関係1として付随します。

$$DwDt = 4\ln(2),$$

また、パルスの周波数成分はスペクトル位相 $f(\omega)$ によって記述されます。式(2)において、 D は角周波数を表し、角周波数は 2π で除算することによってリニア周波数 n (可観測量)へ変換が可能です。

$$n = \omega/2\pi.$$

リニア周波数を使用すれば不確定性原理は次のように表現されます。

$$cB = DnDt = 2\ln(2)/\pi.$$

入力パルス $E_{in}(\omega)$ が分散材質を通過するとき、その物質により加わる位相は単純に入力場にその物質の伝達関数を乗算することによって得られます。従って、射出パルス $E_{out}(\omega)$ は次式で与えられます。

$$E_{out}(\omega) = E_{in}(\omega) R(\omega) e^{-i\phi_{Mat}(\omega - \omega_0)} \quad (3)$$

ここに、 $\phi_{Mat}(\omega - \omega_0)$ は物質によって追加されるスペクトル位相であり、 $R(\omega)$ は振幅スケール因子です。線形透明媒質の場合、後者は $R(\omega) \propto 1$ で近似されます。

スペクトル位相については、次に示すようにパルスの搬送周波数近傍でテイラー展開するのが一般的な方法です。

$$\phi(\omega - \omega_0) = \phi_0 + \phi_1 \cdot (\omega - \omega_0) + \phi_2 \cdot \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} + \phi_3 \cdot \frac{(\omega - \omega_0)^3}{6} + \dots \quad (4)$$

この方法を用いることで、分散がパルス特性に与える影響をより簡単に理解することが可能になります。

$$f(\omega) = k(\omega)L,$$

上式が成立することを考慮し(k は伝播定数、 L は媒質の長さ)、群速度が次式、

$$nG = d\omega/dk,$$

で定義されることから容易に分かりますが、(4)の第1項には位相が一定値加わります。第2項は $1/vG$ に比例し、パルス遅延を発生させます。これらの項はいずれもパルス形状には影響を与えません。第3項は群遅延分散(GDD)と呼ばれ、次の因子に比例します。

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_G} \right)$$

この項はパルス内の異なるスペクトル成分に周波数依存の遅延を発生させパルスを時間的に変化させます。GDDとGVDの間には次の関係が存在します。

$$f_2(\omega) = k_2(\omega)L.$$

第4項は三次分散(TOD: Third Order Dispersion)と呼ばれ、パルスにまたがる二次位相に適用されます。この回折の目的に沿って、展開項は第三項までで打ち切り、それ以上の高次の項については必要に応じて言及します。

(4)式を第三項で打ち切ることにより、ガウス型パルスの式(3)は次のように書き換えられます。

$$E_{out}(\omega) = \sqrt{A_\omega} e^{-\ln 2 \left(\frac{2(\omega - \omega_0)}{\Delta\omega} \right)^2} e^{-i(\phi_0 + \phi_1(\omega - \omega_0) + \phi_2(\omega - \omega_0)^2/2)} \quad (5)$$

従って、位相は周波数領域では単純な加法性を示します。この結果は、このタイプの計算を周波数領域で行うことの利点を明瞭に示しています。

新しいパルス幅を得るには式 (5) に示すスペクトルエンベロープを再変換して時間領域に戻さなければなりません。このフーリエ変換を実行すると、次式のパルスエンベロープが得られます。

$$E_{out}(t) = \sqrt{A_t'} e^{\frac{4(\ln 2)t^2}{2[\Delta t^2 + i4(\ln 2)\phi_2]}} \quad (6)$$

$$e^{-\ln 2 \left(\frac{2t}{\Delta t_{out}} \right)^2} = e^{\frac{4(\ln 2)t^2 \Delta t^2}{\Delta t^4 + 16(\ln 2)^2 \phi_2^2}} \quad (7)$$

式 (7) を Δt_{out} について解くと、パルス幅を表す次式が得られます。

$$\Delta t_{out} = \frac{\sqrt{\Delta t^4 + 16(\ln 2)^2 \phi_2^2}}{\Delta t} \quad (8)$$

最後に、変換を制限したパルス幅をパルスのスペクトル帯域幅で置き換えて式 (8) を群遅延分散について解くと、GDDを観測可能な量（つまりパルス幅とスペクトル）のみを含む項で完全に表現することができます。

$$\phi_2 = \frac{1}{4(\ln 2)} \sqrt{\left(\frac{c_B \Delta t_{out}}{\Delta v} \right)^2 - \left(\frac{c_B}{\Delta v} \right)^4}$$

ここに Δv は $c\Delta\lambda/\lambda^2$ を表します。一般に、 c_B は表1に示すようにパルスプロファイルの関数です。(9) 式を適用できるのはガウシアンパルスのみであることに注意して下さい。

Field Profile	Gaussian	Sech	Lorentzian	Rectangle
c_B	0.441	0.315	0.142	0.443

表1. 各種パルス分析に対応する時間-帯域幅特性 c_B

物質中で起こる分散は、群速度の分散によって定義されます。長さ L の物質によって導入されるGDDの量を評価するには、波長依存性のある屈折率 $n(\lambda)$ を計算しなければなりません。そのため、通常Sellmeier方程式で表してから目的の波長の二次微分係数を計算します。GVDは屈折率の波長に対する二次微分係数に、次の式で関連付けられます。

$$GVD = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \left(\frac{d^2 n}{d\lambda^2} \right)$$

GDDはGVDに単純に物質の長さを乗算することで得られます。何種類かの光学材料の分散特性を表2に示します。

材料	"λ" (nm)	n (λ)	dn/d "λ" (μm ⁻²)	d ² n/d "λ" ² (μm ⁻²)	d ³ n/d "λ" ³ (μm ⁻³)	GVD (fs ² /mm)	TOD (fs ³ /mm)
フューズドシリカ							
	400	1.470	-0.109	0.861	-9.600	97.43	30.2
	450	1.466	-0.076	0.512	-4.984	82.43	27.24
	500	1.462	-0.055	0.323	-2.809	71.4	25.53
	550	1.460	-0.042	0.214	-1.686	62.82	24.62
	600	1.458	-0.033	0.146	-1.064	55.85	24.28
	650	1.457	-0.027	0.103	-0.699	49.98	24.42
	700	1.455	-0.023	0.074	-0.476	44.87	24.99
	750	1.454	-0.020	0.054	-0.333	40.3	25.99
	800	1.453	-0.017	0.040	-0.239	36.11	27.44
	850	1.453	-0.016	0.030	-0.175	32.18	29.36
LakL21							
	400	1.659	-0.179	1.463	-16.950	165.6	57.42
	450	1.652	-0.123	0.855	-8.552	137.7	49.42
	500	1.647	-0.089	0.534	-4.731	118	44.78
	550	1.643	-0.067	0.351	-2.804	103.2	42.05
	600	1.640	-0.052	0.239	-1.753	91.4	40.59
	650	1.637	-0.042	0.168	-1.144	81.68	40.06
	700	1.636	-0.035	0.121	-0.774	73.37	40.3
	750	1.634	-0.030	0.089	-0.540	66.06	41.25
	800	1.632	-0.026	0.066	-0.386	59.46	42.89
	850	1.631	-0.023	0.049	-0.282	53.37	45.25
SF10							
	400	1.778	-0.543	5.946	-97.730	672.9	510.5
	450	1.757	-0.335	2.899	-36.740	467.1	301.6
	500	1.743	-0.225	1.632	-17.080	360.8	213.5
	550	1.734	-0.161	1.006	-9.046	295.9	168.1
	600	1.727	-0.120	0.660	-5.237	251.9	141.5
	650	1.721	-0.093	0.453	-3.235	219.8	124.7
	700	1.717	-0.074	0.322	-2.100	195.2	113.6
	750	1.714	-0.060	0.235	-1.418	175.5	106.1
	800	1.711	-0.050	0.176	-0.988	159.2	101.1
	850	1.709	-0.042	0.134	-0.708	145.5	97.97
BK7							
	400	1.529	-0.130	1.082	-12.300	122.4	40.2
	450	1.524	-0.089	0.638	-6.262	102.9	34.72
	500	1.520	-0.063	0.403	-3.485	89.07	31.31
	550	1.517	-0.047	0.268	-2.074	78.74	29.02
	600	1.515	-0.035	0.185	-1.301	70.69	27.39
	650	1.514	-0.028	0.132	-0.851	64.22	26.19
	700	1.513	-0.022	0.097	-0.576	58.89	25.28
	750	1.512	-0.018	0.073	-0.402	54.42	24.57
	800	1.511	-0.015	0.056	-0.288	50.6	24.01
	850	1.510	-0.012	0.044	-0.210	47.31	23.55

スペクトルとガウシアンパルスの自己相関を測定し、式 (9) を使用することによってGDDの量を決定することができます。図1に示すのは3種類のパルスの電場を数値シミュレーションした結果です。すべてのパルスが100nmの帯域幅を含み、中心波長はいずれも800nm近傍です。黒色で示す曲線はGDDを0としたパルスに対応し、赤色の曲線はGDDを5fs²に、青色の曲線はGDDを-5fs²にそれぞれ対応します。最短幅のパルスは、GDDがゼロのパルスに対応します。赤色パルス（正チャープ）では、高周波数成分が低周波数成分に遅れる傾向を示し、青色パルス（負チャープ）では低周波数成分が高周波数成分に遅れる傾向を示します。

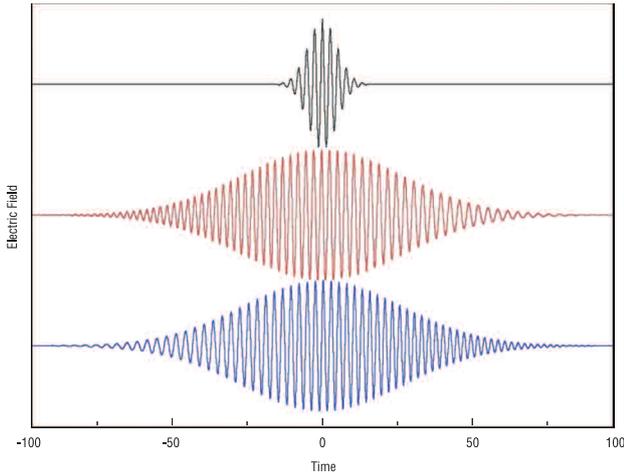


図1. GDDが帯域幅100nmパルスに及ぼす効果

この場合、導入されるGDDの量は約1000 fs²で、ビームがわずか数個の光学部品中で伝播する状況に対応します。この効果は、長さ100fsを超えるようなパルスに対しては重要ではないことが明らかですが、25 fsのパルスに対しては幅が4倍に広がります。

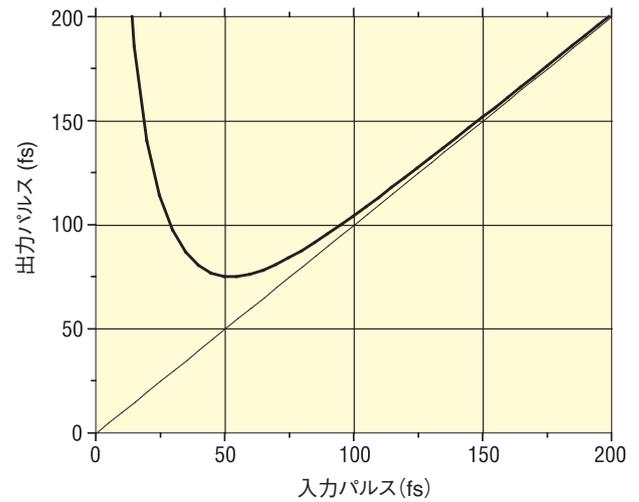


図2. 800nmのフェムト秒パルスが、長さ20mmのBK7ガラス中を伝播することにより生ずる広がり

図2に示すのは、中心波長800nmのガウシアンパルスが長さ20mmのBK7ガラスを通過する前後で、どのように変化するかを式(8)と表2のデータを用いて計算したものです。

参考文献

- 1) J. Diels and W. Rudolf, *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*, Second Edition (Massachusetts, Academic Press, 2006).
- 2) E. Oran Brigham, *The Fast Fourier Transform: An Introduction to Its Theory and Application* (New Jersey, Prentice Hall, 1973).