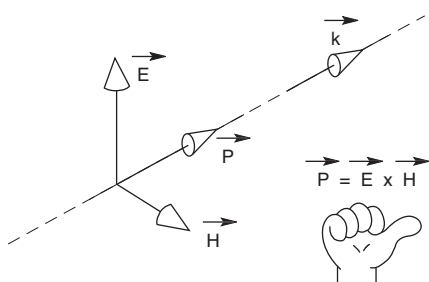


# 光学公式

## Optics Formulas

### 右手の法則

光とは、横方向に伝わる電磁波です。電界Eと磁界Mは互いに垂直で、伝播ベクトルkに対しても垂直です。出力密度は、ポインティングベクトルP、およびEとHのベクトル積によって与えられます。各要素の方向は、親指を除いて握った右手の指をE、手のひらをH、伸ばした親指を光の進行方向とすればすぐに覚えられます。



### 強度のノモグラム

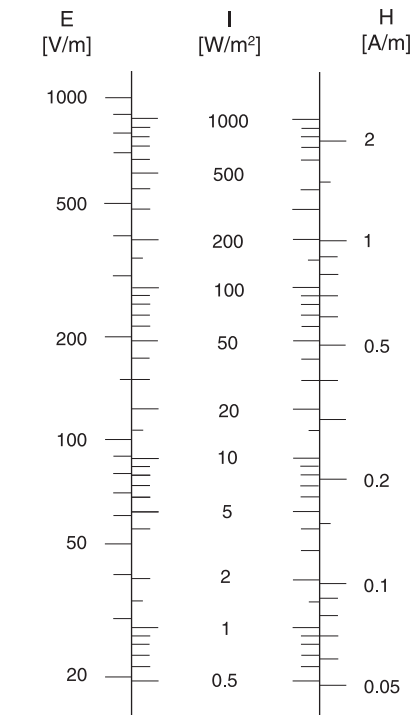
下記のノモグラムは、真空中でE、Hと光度Iの関連があります。あなたは、これらを他の分野で使うかもしれません。

例 [A/mm]、[W/mm<sup>2</sup>]、[V/mm]

もし、あなたが電気の単位でこれらを変えるようにするとEとHによってIが変化する事を覚えておいてください。

たとえば [V/m]、[mA/m]、[mW/m<sup>2</sup>]

または [kV/m]、[kA/m]、[MW/m<sup>2</sup>]



### 光の強度

光の強度IはW/m<sup>2</sup>、EはV/m、HはA/mという単位で表わされます。IとEおよびHとの関係は、オームの法則によく似ています。ピーク値に対するこれらの式を以下に示します。

$$E = \eta H, \quad H = \frac{E}{\eta}, \quad \eta = \frac{E}{H}$$

$$I = \frac{EH}{2}, \quad I = \frac{E^2}{2\eta}, \quad I = \frac{\eta H^2}{2}$$

$$E = \sqrt{2\eta I}, \quad H = \sqrt{\frac{2I}{\eta}}$$

$$\eta_0 = 377 \text{ ohms } (\Omega)$$

$$\eta = \frac{\eta_0}{n}$$

$\eta_0$ は真空中における光のインピーダンス、 $\eta$ は屈折率nの媒質中における光のインピーダンスです。

### 波の数値関係

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$$

$$= \frac{2\pi n v}{c} = \frac{n\omega}{c}$$

$$v = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{n\lambda}$$

$$= \frac{kc}{2\pi n} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\lambda = \frac{c}{nv} = \frac{\lambda_0}{n}$$

$$= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{n\omega}$$

k: 波数ベクトル [ラジアン/m]

v: 周波数 [Hz]

$\omega$ : 角周波数 [ラジアン/秒]

$\lambda$ : 波長 [m]

$\lambda_0$ : 真空中での波長 [m]

n: 屈折率

### エネルギー変換

$$\text{波数 } (\nu) [\text{cm}^{-1}] = \frac{10^4}{\lambda_0 [\mu\text{m}]}$$

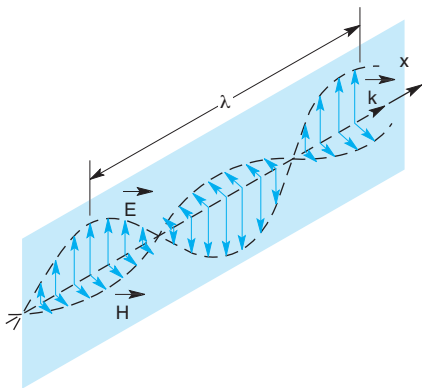
$$1 \text{ 光子あたりの電子ボルト (eV)} = \frac{1.242}{\lambda_0 [\mu\text{m}]}$$

### 波長変換

1 nm = 10 オングストローム(Å) = 10<sup>-9</sup>m  
 = 10<sup>-7</sup>cm = 10<sup>-3</sup>μm

### 直線偏光された光

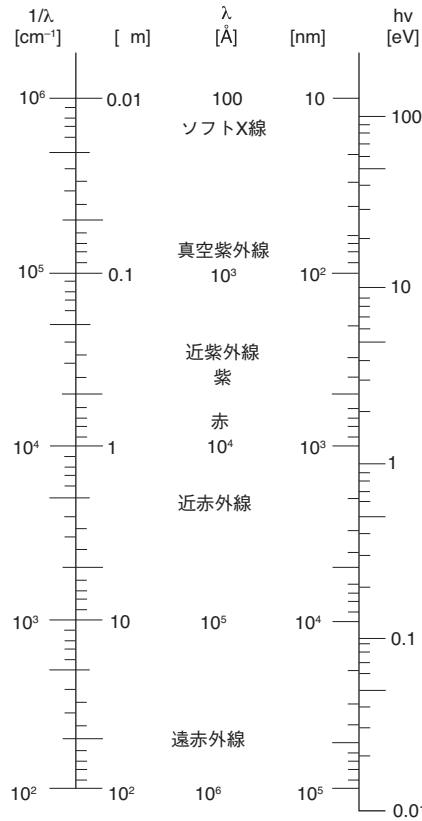
直線偏光された光においては、下の図に示すように、電界Eと磁界Hは伝播ベクトルkに平行で互いに直角な関係が保たれます。



EとHは共に、次の式に示すように時間的・空間的に振動します。

$$\sin(\omega t - kx)$$

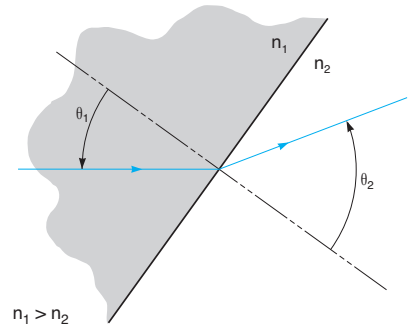
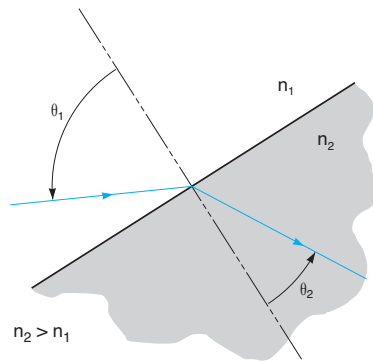
波長ノグラムは波数、光子エネルギーおよび波長を示します。



### スネルの法則

スネルの法則は、光線が屈折率n<sub>1</sub>の媒質から異なる屈折率n<sub>2</sub>の媒質に進む際の挙動を示します。光は通常、ある角度をもって2つの媒質の境界面に入ります。この角度は入射角と呼ばれ、入射面(境界面)の法線から入射光束までの角度を表わします(図参照)。n<sub>1</sub><n<sub>2</sub>の場合、光は法線方向に屈折します。n<sub>1</sub>>n<sub>2</sub>の場合、光は法線と反対方向に屈折します(下図参照)。スネルの法則は次の式で表わされます。

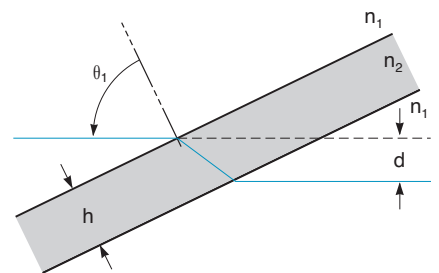
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$



### ビームの変位

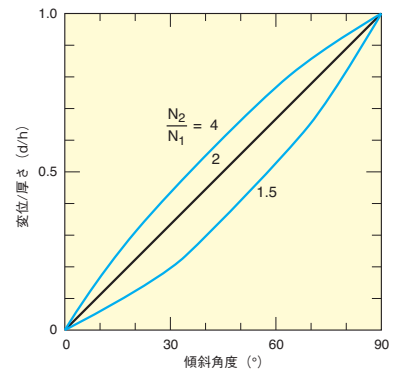
ガラスの平板を使用すれば、方向を変えずに光線を横方向に変位させることができます。変位量は入射角によって変化します。垂直入射の場合の変位量は0で、かすみ入射の場合はガラス板の厚さに等しくなります。

かすみ入射とは光が、入射面の法線に対して90°に近い角度で入射すること。



$$d = h \sin \theta_1 \left[ 1 - \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1}} \right]$$

ガラス板の傾斜角と2つの異なる屈折率との関係を下のグラフに示します。



## ビームの偏角

例えば水槽の側面が傾いている場合など、傾けたガラス板の両側の媒質が異なる場合は変位と偏角の両方が発生します。変位量は同じですが、偏角は式によって求められます。 $\delta$ はガラス板の屈折率には関係しない点に注意してください。偏角は、媒質1と3があたかも1つの境界面で接しているかのように発生します。

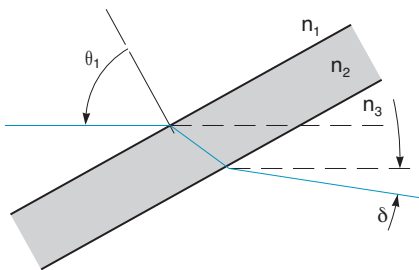
例：STPIにおける空気の屈折率は約1.0003です。この場合、ガラス製のプリースター角ウィンドウを通過するHeNeレーザー光線の偏角は次の式で求められます。

$$\delta = (n_3 - n_1) \tan \theta$$

プリースター角では、 $\tan \theta = n_2$

$$\delta = (0.0003) \times 1.5 = 0.45 \text{ mrad}$$

高度10,000フィートでは、空気の圧力は海面高度の2/3になります。この場合の偏角は0.30  $\mu\text{rad}$ です。2個のウィンドウが平行ではなく対称に置かれている場合は、この変化によってレーザーのアライメントが合わなくなってしまいます。

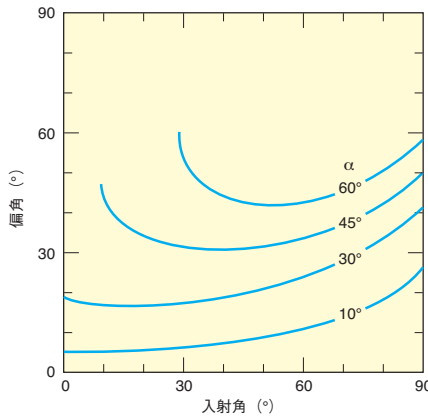
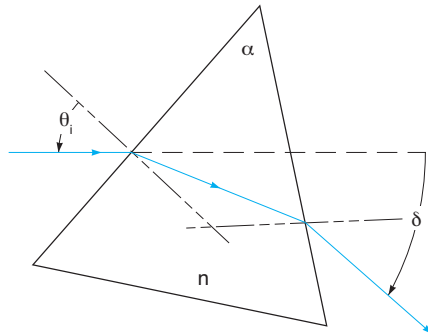


$$\delta = \theta_1 - \sin^{-1} \left( \frac{n_1}{n_3} \sin \theta_1 \right) \approx (n_3 - n_1) \tan \theta_1, \text{ if } n_3 \approx n_1$$

## プリズムの偏角

プリズムの偏角は、プリズムの角度、屈折率 $n$ 、および入射角 $i$ によって決まります。プリズム内の光路がプリズム角の1/2の面に垂直な場合、偏角は最小になります。プリズム角が小さい場合（光学ウェッジ）、垂直入射を中心とした非常に広い角度にわたり、偏角は一定となります。このようなウェッジにおける偏角は次の式で求められます。

$$\delta \approx (n - 1)\alpha$$



## プリズム全反射 (TIR)

TIRではガラスと空気の境界面が清浄であることが求められ、反射面には異物が付着しないする必要があります。また、入射角が臨界値を下回った場合もTIRを得ることはできなくなります。屈折率 $n$ の直角プリズムでは、光は角度 $\theta$ でプリズム面に入射する必要があります。

$$\theta < \arcsin \left( \frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{n} \right)$$

可視領域においては、BK-7 ( $n = 1.517$ ) で $\theta = 5.8^\circ$ 、フューズドシリカ ( $n = 1.46$ ) で $2.6^\circ$ です。プリズムは光路長を長くします。レーザーを使用する場合その影響は最小限に抑えられますが、拡散ビームにおける焦点のずれや色収差の問題については考慮する必要があります。

## フレネルの式：

$i$  - 入射媒質

$t$  - 透過媒質

スネルの法則を使用して  $t$  を求めます。

## 垂直入射：

$$r = (n_i - n_t) / (n_i + n_t)$$

$$t = 2n_i / (n_i + n_t)$$

## ブリュースター角：

$$\theta_B = \arctan (n_t / n_i)$$

s偏光だけが反射されます。

## 全反射 (TIR)：

$$\theta_{TIR} > \arcsin (n_t / n_i)$$

TIRでは、 $n_t < n_i$  でなければなりません。

## 振幅反射と透過率：

振幅反射と透過率は次の式で求められます。

$$r = E_r / E_i \quad t = E_t / E_i$$

## 垂直以外の入射：

$$r_s = (n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t) / (n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)$$

$$r_p = (n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t) / (n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t)$$

$$t_s = 2n_i \cos \theta_i / (n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)$$

$$t_p = 2n_i \cos \theta_i / (n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t)$$

## 強度反射率：

強度反射率と強度透過率は太文字で示します。

$$R = r^2 \quad T = t^2 (n_t \cos \theta_t) / (n_i \cos \theta_i)$$

屈折率が異なることから、2つの媒質内における光速は異なります。コサインの比は、境界面両側におけるビーム断面積の差を補正します。

強度（ワット数/面積）についても、この幾何学的傾斜計数を使用して補正を行う必要があります。

$$I_t = T \times I_i (\cos \theta_i / \cos \theta_t)$$

### エネルギーの保存

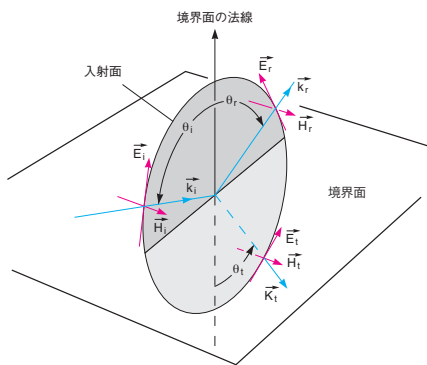
$$R + T = 1$$

この関係は、p成分とs成分、および合計出力についてあてはまります。

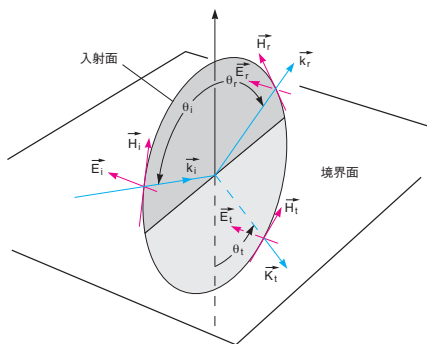
### 偏光

反射および透過の計算を簡単にするために、入射電界を2つの直線変成分に分けます。下の図では、入射面を円盤で表わしています。境界面の法線およびすべての伝播ベクトル ( $k_i$ ,  $k_r$ ,  $k_t$ ) はこの面内に含まれます。

入射面に平行なEはp偏光です。

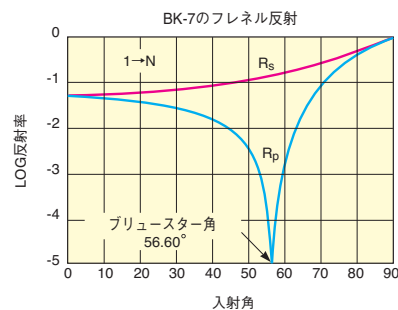
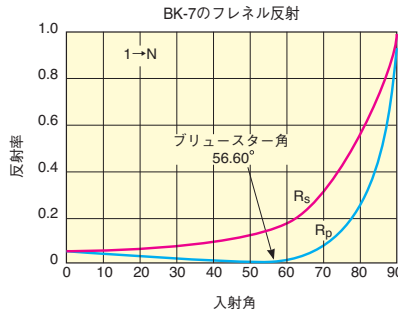


入射面に垂直なEはs偏光です。

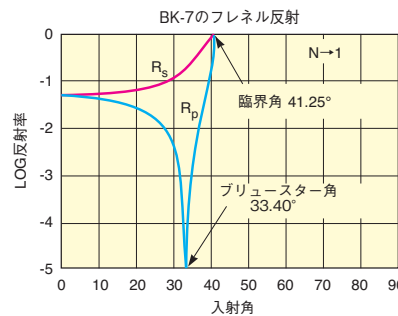
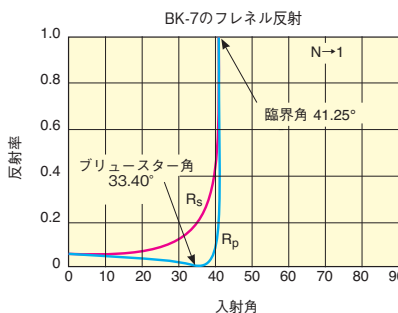


### 強度反射率

光が空気 ( $n_i = 1$ ) からBK-7ガラス ( $n_t = 1.51673$ ) へと進む際の強度反射率  $R_s$  と  $R_p$  を、線形目盛りと対数目盛りで示します。ブリュースター角は  $56.60^\circ$  です。



これに対し、光がBK-7ガラスから空気中へと進む際の反射率を示します。ブリュースター角  $= 33.40^\circ$ 、臨界角 (TIR角)  $= 41.25^\circ$



### 薄肉レンズ公式

単一の平面だけで特性を決定できるレンズのことを薄肉レンズと呼びます。図中に示す各数値の間には、さまざまな関係が成り立ちます。

ガウスのレンズ公式：

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{F}$$

ニュートンの公式：

$$x_1 x_2 = -F^2$$

倍率：

横倍率：

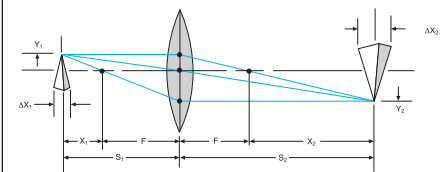
$$M_T = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{s_2}{s_1}$$

$M_T < 0$ 、像は倒立

縦倍率：

$$M_L = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -M_T^2$$

$M_L < 0$ 、前後反転なし



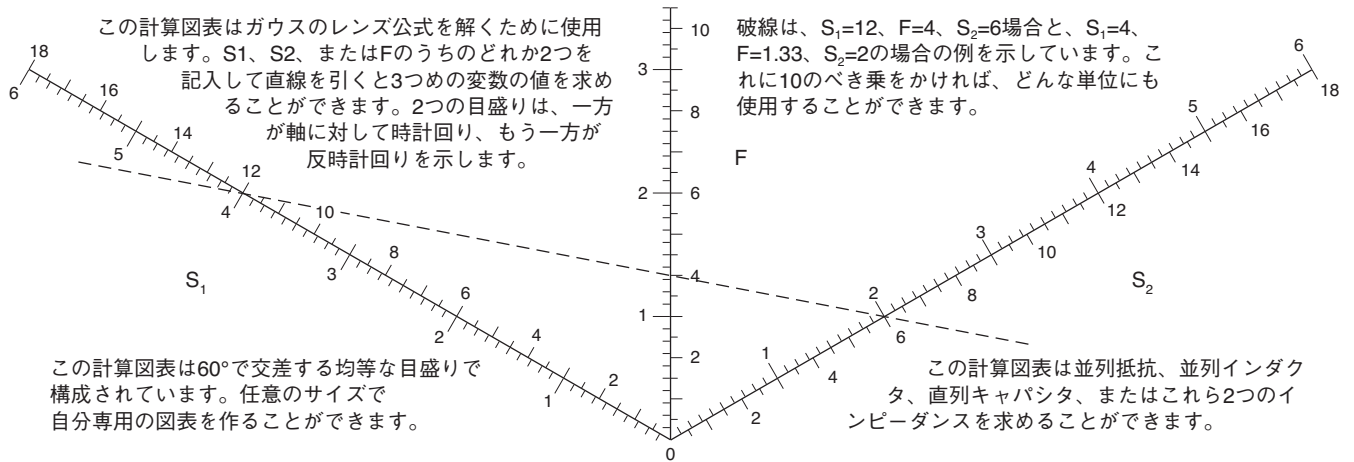
### 像とレンズの符号規約

記号	+	-
$s_1$	実像	虚像
$s_2$	実像	虚像
F	凸レンズ	凹レンズ

### 最小収差のレンズタイプ

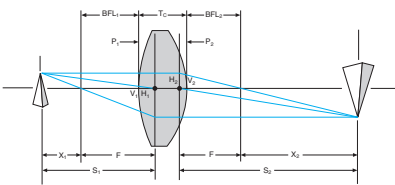
$ s_2/s_1 $	最適レンズ
$< 0.2$	平凸/平凹
$> 5$	平凸/平凹
$> 0.2$ または $< 5$	両凸/両凹

レンズ計算図表：



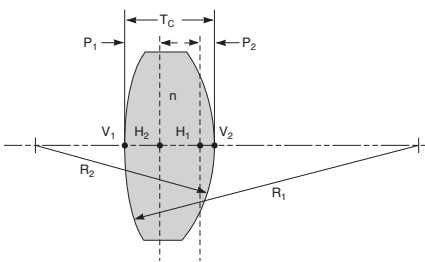
厚肉レンズ

厚肉レンズとは、1つの平面から測った焦点距離だけでは特性を決定できないレンズを言います。レンズの頂点V<sub>1</sub>、V<sub>2</sub>からP<sub>1</sub>、P<sub>2</sub>の距離にある2つの異なる面H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>から測った場合、焦点距離は一定です。後方焦点距離BFL<sub>1</sub>およびBFL<sub>2</sub>は、頂点から測定します。薄肉すべての数値が主平面から測ったものであれば、薄肉レンズの公式を使うことができます。



レンズ製作者の公式

下の図で、左を向いている凸面の曲率半径が正です。すなわち、R<sub>1</sub>>0、R<sub>1</sub>>0となります。主平面のオフセットPは右方向が正です。図に従うと、P<sub>1</sub>>0、R<sub>1</sub>>0となります。T<sub>c</sub> = 0の時は、薄肉レンズの焦点距離が求められます。



$$\frac{1}{F} = (n-1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)T_c}{nR_1R_2} \right]$$

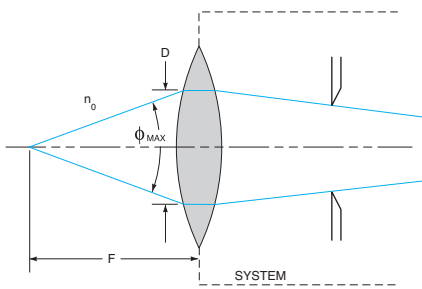
$$P_1 = -\frac{F(n-1)T_c}{nR_2}$$

$$P_2 = -\frac{F(n-1)T_c}{nR_1}$$

開口数 (NA数)

Φ<sub>MAX</sub>は、光学系を通過することのできる光線によって構成される円錐の頂角です (下図)。

$$NA = n_0 \sin \left( \frac{\Phi_{MAX}}{2} \right)$$



φが小さい場合は、次のように近似できます。

$$f/\# = \frac{F}{D} \approx \frac{1}{2 NA}$$

FナンバーとNAは共に光学系を対象とした値で、出射レンズだけで決まる値ではありません。

定数と単位

真空中の光の速度	c = 2.99810 <sup>8</sup> m/s
プランク定数	h = 6.625 x 10 <sup>-34</sup> Js
ボルツマン定数	k = 1.308 x 10 <sup>-23</sup> J/K
ステファン・ボルツマン定数	σ = 5.67 x 10 <sup>-8</sup> W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup>
1電子ボルト	eV = 1.602 x 10 <sup>-19</sup> J
エクサ (E)	10 <sup>18</sup>
ペタ (P)	10 <sup>15</sup>
テラ (T)	10 <sup>12</sup>
ギガ (G)	10 <sup>9</sup>
メガ (M)	10 <sup>6</sup>
キロ (k)	10 <sup>3</sup>
ミリ (m)	10 <sup>-3</sup>
マイクロ (μ)	10 <sup>-6</sup>
ナノ (n)	10 <sup>-9</sup>
ピコ (p)	10 <sup>-12</sup>
フェムト (f)	10 <sup>-15</sup>
アト (a)	10 <sup>-18</sup>

一般的なレーザーの波長

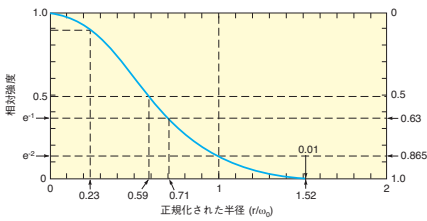
レーザー光源	(nm)
ArF	193
KrF	248
Nd:YAG(4)	266
XeCl	308
HeCd	325, 441.6
N <sub>2</sub>	337.1, 427
XeF	351
Nd:YAG(3)	354.7
Ar	488, 514.5, 351.1, 363.8
Cu	510.6, 578.2
Nd:YAG(2)	532
HeNe	632.8, 543.5, 594.1, 611.9, 1153, 1523
Kr	647.1, 676.4
Ruby	694.3
Nd:Glass	1060
Nd:YAG	1064, 1319
Ho:YAG	2100
Er:YAG	2940

### ガウス強度分布

ガウス強度分布は次の式で表わされます。

$$I(r) = I(0) \exp(-2r^2/\omega_0^2)$$

これをグラフに示します。



右側の縦軸は、半径rの円内に含まれる出力と合計出力との比です。

$$P(r) = P(\infty) \left[ 1 - \exp\left(-2r^2/\omega_0^2\right) \right]$$

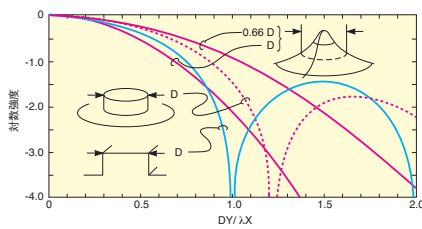
合計ビーム出力P(∞) [ワット] と軸上強度I(0) [ワット/単位面積] の間には次のような関係があります。

$$P(\infty) = (\pi\omega_0^2/2) I(0)$$

$$I(0) = (2/\pi\omega_0^2) P(\infty)$$

### 回折

下の図は、均一照射のスリット、円形開口、強度が1/e<sup>2</sup>になる位置の直径がDおよび0.66Dのガウスビーム (0.66Dガウスビームの99%は直径Dの開口を通過します) について、フラウンホーファー領域における強度分布を比較したものです。測定は軸からY離れた位置で、光源からの距離がYよりも大きい位置で行っています。



### 平行ガウスビームのフォーカシング

下の図で1/e<sup>2</sup>半径ω(x)、波面曲率半径R(x)は、x=0のビームウエストの前後で、xの値に応じて変化します。基準となる式を次に示します。

$$\omega^2(x) = \omega_0^2 \left[ 1 + \left( \lambda x / \pi \omega_0^2 \right)^2 \right]$$

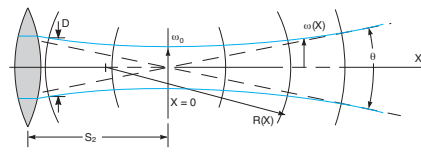
$$R(x) = x \left[ 1 + \left( \pi \omega_0^2 / \lambda x \right)^2 \right]$$

2ω<sub>0</sub>は、1/e<sup>2</sup>強度の点におけるウエスト直径です。ウエスト位置における波面は平面です [R(0) = ∞]。

レンズからウエスト位置までの距離と焦点距離はほぼ一致します (s<sub>2</sub> ≈ F.)。

Dは、平行ビームの直径、またはレンズに照射されるビームの直径です。

$$f\text{-number} \equiv f/\# = \frac{F}{D}$$



### 焦点深度 (DOF)

$$DOF = (8\lambda/\pi)(f/\#)^2$$

DOF < Fの場合に限り、以下の関係が成り立ちます。

### 新しいウエスト直径

$$2\omega_0 = \left( \frac{4\lambda}{\pi} \right) (f/\#) = \left( \frac{4\lambda}{\pi} \right) \left( \frac{F}{D} \right)$$

### ビーム拡散

$$\theta = (f/\#)^{-1}$$

### 光学濃度

$$D = -\log(T)$$

または

$$T = 10^{-D}$$

### SAG

$$Sag = R - \sqrt{R^2 - Y^2}$$

R = 曲率半径とY = 表面の開口径。SAGisに「サジッタ」(矢に対するラテンの語)の省略形。面積(光軸上)をZ=0とした時のZ軸方向への変異量を表します。