



ニューフォーカスアプリケーションノート #15 レーザー周波数安定化入門

Introduction to Laser Frequency Stabilization

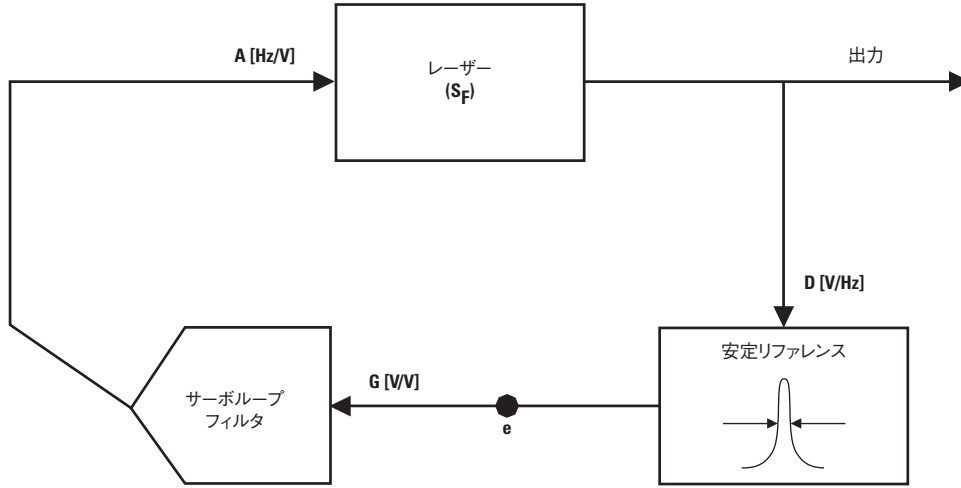


図1：レーザーのフィードバックループの簡略図。SF：周波数雑音のスペクトル密度、e：エラー信号ポイント、D：弁別係数、G：ループフィルタの利得、A：アクチュエータの係数。

チューナブルダイオードレーザー
TLB-6800シリーズ

TLB-7100シリーズ

TLB-6700シリーズ

狭線幅の連続波 (CW) レーザーは、原子物理学、分子物理学、光学物理学のあらゆる分野で利用されます。多くの科学分野で、精密測定を発展させる重要な役割を担ってきましたが、今後もその役割は継続するでしょう。レーザーの「フリーランニング (自由駆動)」線幅、または短期間の安定性は、レーザー周波数を積極的に安定化させない限り、多くのアプリケーションに適さないことがよくあります。このアプリケーションノートでは、レーザー周波数安定化のための強力な簡潔な技術をご紹介します。この技術は現代の光学分野で最も課題の多い精密測定の一部に使用され、CWレーザーから高フィネス光共振器までの周波数の制御と安定化を行います。精密分光法と原子および分子システムの操作は、過去数十年間におけるCWレーザーの安定性の向上によりもたらされた恩恵を直接享受しています。たとえば、光学遷移をベースとする原子時計は、レーザー冷却したサンプル1で利用できるサブヘルツ帯の線幅を正確に調べるために、極めて安定したレーザー光源が必要です。重力波 (LIGO²など) を探査するような干渉計も、周波数と振幅ノイズが極めて低い、狭線幅のレーザーシステムの有無に決定的に左右されます。

次のセクションでは、レーザー安定化に使用されるフィードバック制御システムの主な特徴をご説明し、その重要な役割を強調します。その後、必要なコンポーネントの詳細と、そのシステムのシンプルな実装方法についてご説明します。最後のセクションでは、システムのクローズドループ性能を分析します。

フィードバックループの基本

シンプルなフィードバックループの模式図を図1³に示します。ループの最初のコンポーネントはレーザーであり、これを安定化させます。出力の一部が分割され、フィードバックループで使用されます。レーザー固有のノイズは、周波数変動の直線スペクトル密度として特徴付けられ、平方根単位の帯域幅(B)当たりのRMS周波数変動 (λ_{RMS}) として定義されます。(B): $S_{\mu f} = dn_{RMS}/B^{1/2}$ [Hz/Hz^{1/2}] レーザーが異なると、共振設計の安定性とフィネス、利得媒体の特性、その他のレーザーパラメータに応じて、フリーランニング線幅およびノイズスペクトルも大きく異なります。たとえば、比較的フィネスが高い共振器を備えた固体レーザーの多くで、周波数ノイズのスペクトル密度は、励起および機械的な振動に支配されます。励起および機械的な振動は、通常 $\sim 1/f$ の時点で低下し、フィードバックループにより大幅に抑圧されます。一方で、New FocusTMダイオードレーザーなどの多くのダイオードレーザーシステムで支配的な周波数/位相ノイズは、大抵の場合、高い自然放出率⁷を原因とする量子的な性質によるものです⁷。その結果、より高いフーリ工周波数にまで広がる、大幅なノイズ過程をもたらします。

レーザー周波数の変動を検出するため、極めて安定したリファレンスを使用して比較する必要があります。これを達成するため、一般的な方法として、目的の時間尺度に必要な安定性を提供するように作られた、高フィネスファブリーペロー型共振器を使用します。ファブリーペロー型共振器のm番目の共振周波数 (ν_m) は、共振器長 (L) により、次の式から求められます。 $\nu_m = mc/2L$ この共振周波数は、損失の少ない高反射ミラーを使用すると、非常に鋭くなります⁸。共振器の機構は長期間ではドリフトするおそれがありますが、短時間 (~秒) では非常に優れた安定性があります。飽和可能な原子遷移の非線形応答とは異なり、リファレンス共振器からの信号は、検出した空洞共振のS/N比が、必要なレーザーの安定性を提供するのに十分なS/N比になるまで、理想的に増加します。

レーザー周波数をファブリーペロー型共振器の共振に厳密にロックするには、高SN比で共振を高速に検出する必要があります。これはシステム性能を最終的に決定する要素なので、フィードバックループで最も重要な部分と言えるでしょう。レーザー周波数と空洞共振の差異を、V/Hz単位で与えられる弁別係数Dで電圧に変換します。弁別電圧、または「エラー」信号を取得する方法には幾つかあります。最も単純でわかりやすいアプローチは、共振器の透過フリンジの側面にロックすることです。このサイドフリンジロック手法では、透過率のピークのいずれかの側面上のスロープを利用し、レーザーの周波数変動を振幅変動に変換し、それをフォトダイオードにより検出します。実装は簡単ですが、幾つかの難点があります。第1に、レーザーからの振幅変調 (AM) がエラー信号に直接つながるので、フィードバックループは周波数変調 (FM) とAMの違いがわかりません。そのため、レーザー振幅の変化は、レーザー周波数上に「書きこまれる」こととなります。第2に、ファブリーペロー型共振器の光子ライフタイム⁹により、レーザーの周波数変動が高速だと、共振器を通過する透過率で検出されません。最後の制限は、ロック範囲が狭いことです。ロック位置が少しずれると、周波数が瞬間的に共振器の透過ピーク全体でシフトしたときに、レーザーのロックが解除される場合があります。最後の2つの制限事項は、特に厄介です。高フィネス共振器は、レーザー安定化に適した狭線幅を提供するので好ましいですが、同時にフィードバックループの帯域幅とロックの信頼性を制限します⁹。

より優れた手法である「Pound-Drever-Hall (PDH) 法」による安定化は、実装が容易で、上述の難しい問題を引き起こしません⁹。PDH安定化は、原子と分子の遷移の高感度な検出に使用される、変調分光法の有効な技術に緊密に関連しています¹⁰。Pound¹¹は最初にこの技術をマイクロ波オシレータを安定化させるために提案しました。その方法は、共振線幅より数倍大きい周波数で位相変調を行うというものでした。レーザービームへのAMによる制限を避けるため、PDH安定化はレーザー周波数の高速変調を行い、空洞共振の両側ですばやくプローブを行います。十分に高い変調周波数で共振情報が検出されたら、振幅変調はそのショットノイズ制限レベルにまで低減できます。さらに、PDH安定化はファブリーペロー型共振器に反射した光も活用します。PDH法のもうひとつの重要な側面は、共振器のライフタイムによる応答制限がないことです。これにより、フィードバックループの帯域幅がさらに広くなります。次のセクションでは、この技術の詳細とシンプルな実装方法をご説明します。

エラー信号 (e) が生成されたら、サーボ「ループフィルタ」を通じて送られ、レーザーに適切な位相とともにフィードバックがなされます。フィードバックループの時間遅延が有限であるため、エラー信号のフーリエ周波数のすべてが適切な位相とともにレーザーに戻ることはありません。周波数依存電圧利得 (G、単位はV/V) を一部の周波数でゼロに向けてロールオフし、正のフィードバックを防止する必要があります。ループフィルタにより信号に条件付けを行ったら、係数A、単位Hz/Vで特徴付けた補正電圧をアクチュエータに適用します。通常、適用した補正信号に対してアクチュエータが平坦な周波数応答を示す周波数帯域により、サーボループの最大帯域幅が決まります。たとえば、ピエゾ素子をマウントした共振器用ミラーをアクチュエータとして使用し、レーザー周波数を補正できます。これらは多くの場合、数kHz次の共振周波数を有します。したがって、ピエゾ共振を励起しないように、サーボ帯域幅はこの値よりもはるかに低い値を維持しなければなりません。New FocusのTLB-7000、TLB-6000およびTLB-6300シリーズのレーザーは、数kHzまでの線形周波数チューニングが容易です。適切なサーボ設計を行うことで、極めて高速なレーザー周波数補正にも同時に使用できます⁵。

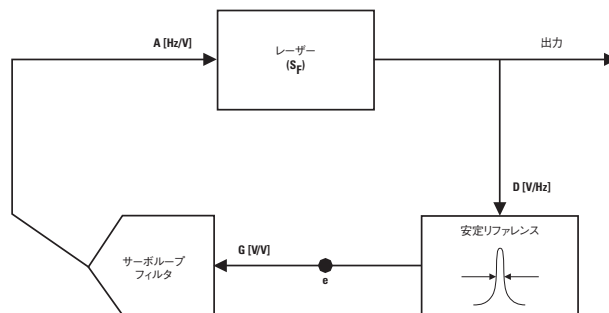


図1: レーザーのフィードバックループの簡略図。
SF: 周波数雑音のスペクトル密度、e: エラー信号ポイント、D: 弁別係数、G: ループフィルタの利得、A: アクチュエータの係数。

Pound-Drever-Hall (PDH) レーザー周波数安定化法

実験セットアップおよびコンセプトモデル

New Focus™のStableWave™、Velocity™およびVortex™シリーズのレーザーは、瞬間的に狭線幅を実現します。これらは精密分光法に最適であり、PDHロック手法を使用することで、高フィネス共振器に容易に安定化可能です。PDHレーザー安定化に必要な重要なコンポーネントも、ニューフォーカスでお取り扱いしています。PDHレーザー周波数安定化を実装するための実験レイアウトを図2で示します。カップリングからレーザー共振器への戻り光を除去するため、光アイソレータをレーザーの後に設置する必要があります。レーザーの高速位相変調では、ニューフォーカスの電気光学位相変調器 (モデル4001または4003) と共にモデル3363のドライバを使用できます。これらの変調器は、非常に純粋なレーザービームの位相周波数変調を提供し、残留振幅変調 (RAM) は最低限に抑えます¹²。(周波数/位相変調に関する詳細は、アプリケーションノート2: 電気光学変調器の実践的な使用方法とアプリケーションをご覧ください。) レーザー位相/周波数がスイープされる周波数と同じ周波数で、ビーム上に望ましくない振幅変調が存在します。この振幅変調は、検出されたエラー信号を破損させ、空洞共振にロックされたときのオフセットが不安定になる¹³原因になりますので、ご注意ください。変調器を通過した後で、レーザービームが部分的に光フィネスファブリーペロー型共振器のモードと一致します。共振器からの反射光は低ノイズフォトダイオード (New Focus モデル 16X1-ACなど) で検出されます。偏光ビームスプリッタとその後の4分の1波長板が、共振器により反射された光を入射光から分割します。図3aは共振器のパワー反射係数を、レーザー周波数の関数として示しています。フィネスが160未満の共振器の場合、フリースペクトル領域の単位で表されます。

図2に示す、セットアップの残りのコンポーネントについて言及する前に、フォトダイオードの信号がレーザー周波数変動に関する情報をどのように示すのかについて議論し、PDH周波数安定化技術のコンセプトモデルについて考えます。位相変調器は、空洞共振の線幅よりもはるかに高い周波数で、レーザーキャリアの位相をスイープします。この位相変調により、FMサイドバンドがレーザーキャリアに発生し、変調された周波数 Ω によりキャリアから離れて配置されます。それらは空洞共振から十分に離れているため、大幅な位相シフトが起こることなく、リファレンス用共振器入射ミラーで直接反射します。レーザーキャリア周波数が空洞共振と合致すると、キャリア周波数で共振器から反射した光が入射光の位相と同相になります。フォトダイオードにより反射したキャリアとサイドバンドを検出すると、キャリアと各サイドバンドとの間のビートがもたらした位相周波数 Ω で2種類のヘテロダインビートを生成します。共振時には、FMの性質から、これら2つのビームが互いに位相から180度の角度を持ちます。そこで、この2つのビートは正確に相殺され、変調周波数からフォトダイオードの信号がなくなります。

レーザー周波数が空洞共振から逸脱すると、キャリア周波数の反射光は位相シフトされます。その兆候は、周波数偏差の方向により決定されます(図3(a))。フォトダイオードから生成された2つのヘテロダインビートは、位相からちょうど180度の位置ではなくなるため、相殺されません。そこで、 Ω でのビート信号の振幅を検出すると、レーザー周波数の補正に使用できるエラー信号が発生します。図2は、位相変調器を動かす周波数 Ω の信号とともに、フォトダイオード出力の周波数混合によりビート振幅がどのように抽出されるかを示しています。変調信号光源と混合器の間に位相シフターを使用し、混合器の入力が確実に適切な位相関係をもつようにします。混合器の出力からDC項を絶縁するために低パスフィルタを使用すると、アクチュエータに適用するエラー信号を提供します。このエラー信号により、適切な調整を行った後レーザー周波数を補正します。

レーザー周波数が空洞共振を通じてスイープされますので、位相シフターを調整し、エラー信号を図3(b)で示すとおりに一致させます。この図は空洞のないスペクトル領域の6%に相当する、変調周波数 Ω により取得しました。付録では、PDH技術に関するより詳細な分析を行い、周波数 Ω でのフォトダイオード信号の振幅について詳しい説明を載せることで、レーザー周波数変動に関する情報を提供しています。

PDHのエラー信号の重要な特徴は、応答域が広いことです。図4(c)の点線は、共振器の応答に対するフーリエ周波数のログ振幅を表します(ボード線図)。フーリエ周波数が低いとき、エラー信号の応答は周波数全体で一定です。空洞振幅の半値半幅(HWHM)を超える周波数では、共振応答機能に対するフーリエ周波数の平滑な-6 dB/オクターブのロールオフがあります。共振応答関数がこのように変化するのには、リファレンス共振器の保管時間が原因です。キャリア周波数での反射光の位相は、入射レーザーの位相と周波数の時間平均を表しています。直接反射サイドバンドは共振器からの位相シフトがないため、反射サイドバンドとキャリアの間のヘテロダインビートは、レーザーの位相の高速変動に感度があります。それにより、レーザーはその時間平均に対して効果的な位相ロックが行えます。この能力により、PDHロック技術が広帯域幅の周波数変動に対して補正を行えるので、レーザー周波数安定化に有効です。

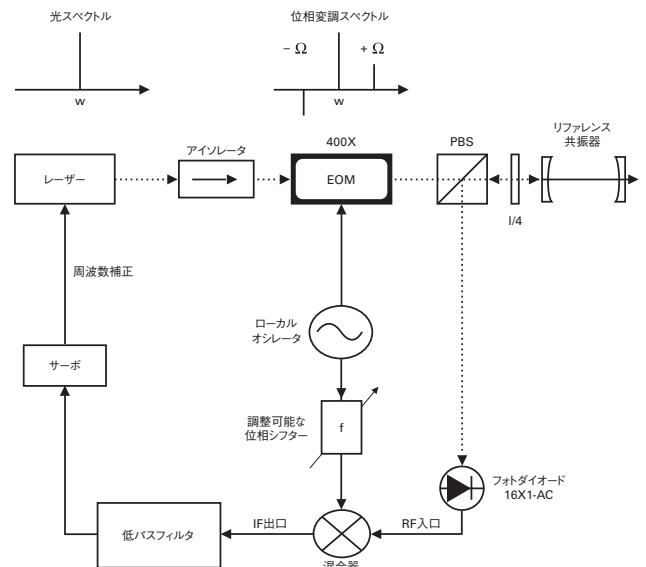


図2: PDHレーザー周波数安定化の実験レイアウト。EOM: 電気工学変調器、PBS: 偏光ビームスプリッタ、1/4: 4分の1波長板。

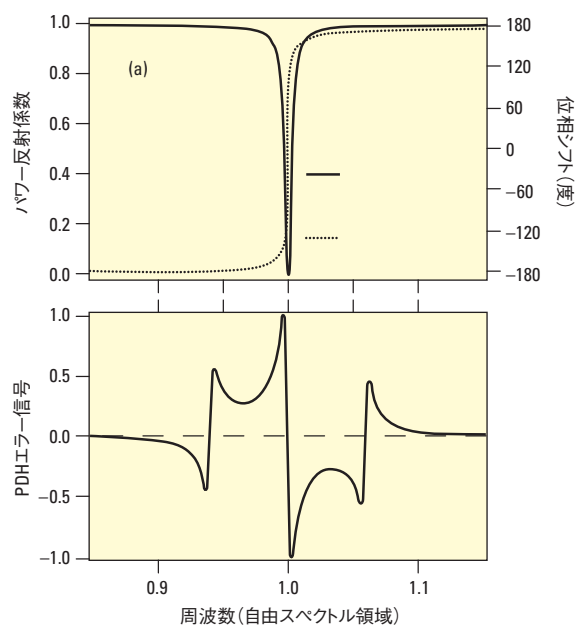


図3: (a) パワー反射係数および位相シフト。フィネスが~160のファブリーペロー型共振器のレーザー周波数に対する反射率。周波数尺度は自由スペクトル領域を基準としています。(b) 変調周波数 Ω =自由スペクトル領域の6%の場合のPDHエラー信号に対するレーザー周波数。

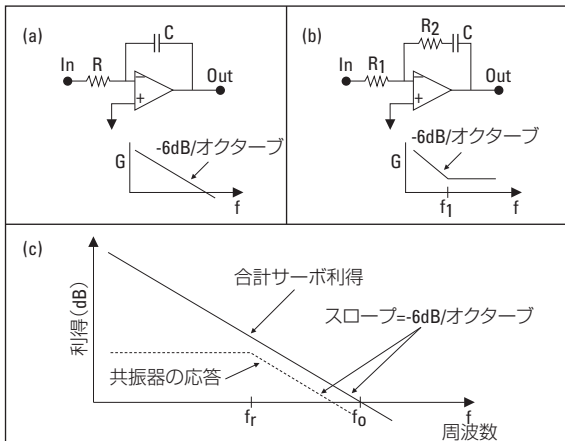


図4：(a)および(b)サーボループフィルタおよびそれに対応する周波数応答に有用な回路。(c)ログスケールで示す安定フィードバック制御ループの合計サーボ利得（直線）とリファレンス共振器の周波数応答（点線）の一例。 f_r はリファレンス空洞共振のHWHMに対応します。

フィードバックループ：ループフィルタおよびアクチュエータ

良好なエラー信号が得られたら、サーボループフィルタを介してこの信号を送り、レーザーのアクチュエータに戻して「ループを閉じる」ステップが残っています。すでに議論したとおり、ループフィルタの役割は、適切な振幅、位相および周波数応答でレーザーに適用されるエラー信号を調整することです。エラー信号の位相があまりにも急速にシフトすると正のフィードバックが発生します。これを避けるため、全体のフィードバックループの利得が、単位利得周波数 (f_0) のとき9dB/オクターブ未満のスロープを有することが重要です¹⁴。単位利得周波数の値は、全体のループ利得に依存しますので、次の式が成り立ちます。 $G_{total} = DGA$ 図4(c)は安定フィードバック制御ループ（直線）の全体的な利得をボード線図の一例を示しています。図4(a)および(b)は、サーボループフィルタとその個別の周波数応答でよく見られる有用な回路の例を2つ示しています。フィードバックループの帯域幅が共振器のロールオフ周波数 f_r より大きく少ない場合（つまり、 f_l (i.e. $f_0 \ll f_l$)）、図4(a)で示すシンプルな積分回路があれば、そのループに安定した全体の応答機能を提供することができます。 f_0 が f_r より大きい場合、図4(b)の回路を使用して、リファレンス共振器の応答がロールオフを開始するときの周波数で積分利得を止めることができます（つまり、 $f_1 \leq f_l$ に設定する）。どちらの場合も、合計サーボ利得は図4(c)の直線と同様になります。より高度な応答関数を組み込むと、性能の向上、特に低周波数時の利得を増加させることが可能です¹⁵。

分析を行う

サーボ電子回路が周波数変動を追跡し、レーザーを空洞共振に厳密にロックすることができるかどうかは、クローズドループのエラー信号を分析することで、予測することができます。 $\delta e_{RMS} = \delta v_{RMS} D$ (図1を参照) この信号のフーリエ分析により、フィードバックループがさまざまなフーリエ周波数において検出された変動をどの程度抑圧できるかがわかります。フリーランニング時のノイズスペクトルはレーザーシステムに応じて変わりますが、ほとんどのシステムに見られるノイズの発生源である「1/f雑音」は、通常、フーリエ周波数がパワー p に対して反比例するときに低下します。従って、周波数が低いときにサーボ利得とこの雑音の上昇が一致する、または超過するように、フィードバックループの帯域幅が十分に高いことが必要です。

ループ内の分析だけでは、絶対的な安定性やレーザーの線幅を判断することはできません。なぜなら、この時点で分析をしても、レーザー周波数の実際の変動と、弁別器自体に存在するノイズとを区別することができないからです。たとえば、リファレンス共振器の共振が緩やかな熱膨張または共振器長のかすかな振動が原因で変化している場合、フィードバックループはこれらの変動を実際のレーザー出力の上に書き込んでしまいます。エラー信号の電圧をモニターすることで、フィードバックループの性能を把握することはできますが、絶対安定性またはレーザーの線幅を定量化するためには、個別に安定化したレーザーシステムが必要です。

一例として、レーザーが空洞共振にロックされている間にエラー信号 e をモニターすると仮定します。このポイントでのRMS電圧の測定値 (δe_{RMS} 、電圧メーターの範囲により決定した帯域幅における測定値) は、アクチュエータの係数の測定値を使用して、レーザーのRMS周波数変動に変換することができます ($\delta v_{RMS} = \delta e_{RMS} D$)。任意の弁別器の係数 $D=1$ V/MHzの場合、電圧 e で10mVの信号が測定されたら、サーボ電子回路は10 kHz (RMS) の空洞共振の範囲内でレーザーのロックを維持できることがわかります。

まとめ

このアプリケーションノートで示した手順を使用すると、Pound-Drever-Hall安定化技術により、TLB-7000、TLB-6900またはTLB-6300シリーズのチューナブルダイオードレーザーをリファレンス共振器に安定化させることができます。積極的なレーザー安定化を最初に試みる時は、リファレンス共振器の線幅をレーザーのフリーランニング時の線幅よりも十分に広くすることを推奨します。このアプリケーションノートは、レーザー安定化のスタート地点として考えてください。最適な性能を達成するためには、より進化したサーボ設計や、リファレンス共振器の構造および取り付けを慎重に行う必要があります。

参考文献

1. B. C. Young, F. C. Cruz, W. M. Itano, and J. C. Bergquist, "Visible Lasers with Subhertz Linewidths," **Phys. Rev. Lett.** **82**, 3799 (1999).
2. <http://www.ligo.org/>
3. For a more detailed discussion of laser stabilization as a problem of control theory, see Refs. 4, 5, and 6.
4. J. L. Hall, "Stabilizing lasers for applications in quantum optics," in Quantum Optics IV, J. D. Harvey and D. F. Walls, eds. **Springer Verlag: Proceedings of the Fourth International Conference**, Hamilton NZ, 1986.
5. J. L. Hall, M. S. Taubman, and J. Ye, "Laser Stabilization," in **Handbook of Optics: Fiber Optics and Nonlinear Optics**, Vol. 4, M. Bass, J. M. Enoch, E. W. V. Stryland, and W. L. Wolfe, eds. (McGraw-Hill, New York, 2001), p. 27.1.
6. T. Day, E. K. Gustafson, and R. L. Byer, "Sub-Hertz Relative Frequency Stabilization of Two-Diode Laser-Pumped Nd:YAG Lasers Locked to a Fabry-Perot Interferometer," **IEEE J. Quan. Elec.** **28**, 1106 (1992).
7. C. E. Wieman and L. Hollberg, "Using diode lasers for atomic physics," **Rev. Sci. Instrum.** **62**, 1 (1991).
8. E. Hecht, **Optics** (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1998).
9. R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward, "Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator," **Appl. Phys. B** **31**, 97 (1983).
10. See for example, **New Focus Application Note #7** and references therein.
11. R. V. Pound, "Electronic frequency stabilization of microwave oscillators," **Rev. Sci. Instrum.** **17**, 490 (1946).
12. See **New Focus Application Note #2**.
13. Ch. Salomon, D. Hils, and J.L. Hall, "Laser stabilization at the millihertz level," **J. Opt. Soc. Am. B** **5**, 1576 (1988).
14. G. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, **Feedback control of dynamic systems**, (Menlo Park: Addison-Wesley Publishing, 1988).
15. J. Helmcke, S. A. Lee, and J. L. Hall, "Dye laser spectrometer for ultrahigh spectral resolution: design and performance," **Appl. Opt.** **21**, 1686 (1982).
16. More in-depth descriptions can be found in other review articles, e.g. E. D. Black, "An Introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization," **Am. J. Phys.** **69**, 79 (2001).

付録

PDHレーザー安定化技術のエラー信号の起源をより具体的に理解するため、このエラー信号の数学的誘導を簡潔に示します¹⁶。まず、レーザー光照射野とファブリーペロー型共振器の相互作用について考えます。レーザーのキャリア周波数 ω で共振器に入射する光照射野は、 $E_{inc} = E_i e^{i\omega t}$ と書くことができます。共振器からのネット反射フィールドは $E_{ref} = E_r e^{i\omega t}$ であり、ここで E_r は共振器の反射係数により E_i に関連付けられます。

$$F(\omega) = E_r / E_i = \left[-r_1 + \frac{T_1 r_2 e^{i\omega / FSR}}{1 - r_1 r_2 e^{i\omega / FSR}} \right],$$

r_1 および r_2 はそれぞれ共振器の入射ミラーと出射ミラーの反射係数であり、 T_1 は入射ミラーのパワー透過係数であり、 FSR は共振器の自由スペクトル領域を示します。図3(a)は共振器のパワー反射係数 $|F|^2$ を示し、自由スペクトル領域の単位で周波数に対してプロットされています。

次に、光照射野における位相変調の影響を検討します。周波数 Ω での位相変調の存在下で、変調深さを B とすると、共振器の入射場は $E_{inc} = E_i e^{i(\omega + B \sin \Omega t)}$ となります。この式は、ベッセル関数を使って次のように展開できます。

$$E_{inc} = E_i e^{i(\omega + \beta \sin \Omega t)} \approx E_i \left[J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t} \right].$$

この式は、変調周波数 Ω によりキャリアから分けられたサイドバンドを生む変調に関する上述の説明を裏付けるものです。リファレンス共振器は各周波数に独立した影響を与えます。変調が存在するときの反射場は、次の式で表すことができます。

$$E_{ref} = E_i \left[F(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + F(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - F(\omega - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t} \right].$$

フォトダイオードの応答は反射ビームのパワーに比例するので、ここで $|E_{ref}|^2$ を計算する必要があります。フォトダイオードの出力はフィルタリングされ、周波数 ω の信号のみを選択します。これは、反射キャリアの位相サンプルとなるのはこの部分の出力だからです。 ω を振動させないすべての項をふるい落とすと、次の式が残ります。

$$|E_{ref}|^2 = 2|E_i|^2 J_0(\beta) J_1(\beta) \left\{ \begin{aligned} & \text{Re} [F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \cos(\Omega t) \\ & + \text{Im} [F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \sin(\Omega t) \end{aligned} \right\}$$

フォトダイオードの出力に2つの項が残りますが、これらの項のうち、重要なのはひとつだけです。PDH法によるレーザー安定化と他のFM手法の重要な違いは、高い変調周波数を使用するかどうかです。先ほど説明したとおり、これは概念的に、レーザーの位相変動がどれだけすばやく検出できるかという共振器の保管時間が制限されることを回避します。現在の状況では、高変調周波数は空洞共振から十分に離れたサイドバンドを発生させますので、 $F(\omega \pm \Omega) \approx -1$ の近似を行えます。

従って、次の式が成り立ちます。

$$F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega) \approx -2i \text{Im} [F(\omega)].$$

この項は純粋に虚数なので、式1の $\cos(t)$ の項は消滅します。前述のとおり、フォトダイオードの出力は変調信号と混合し、 $\sin(t)$ 項を振幅変調する項を抽出します。その結果、レーザー周波数の補正に使用できるエラー信号 e を提供します。

ここで、次の式が成り立ちます。

$$e \propto \text{Im} [F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)]$$

これは、図3(b)でプロットしたとおり、自由スペクトル領域の6%に相当する変調周波数 Ω を示しています。