コンプライアンス曲線の基礎

Understanding the Compliance Curve

実際の構造物には、完全な剛体というものはありません。これは、あらゆる構造物はたわみ、またねじれながら振動しています。ランダムな振動に対する構造物の応答は、それが複雑な変形をしながら振動することと、複数の共振点を持つために、極めて複雑なものになります。動的な剛性を測る古典的な方法であるコンプライアンス曲線は、振動する構造の基本的な動力学的挙動を評価する上で有用なものです。この曲線は動力学的性能を支配する2つの重要なパラメータ、すなわち最小共振周波数と共振点での最大振幅に関する情報を与えますが、これを使用して、その構造物の表面上の2点間の実際の相対運動を算出できます。

動的剛性の数量化の出発点：コンプライアンス

「コンプライアンス」は、ある構造物が外力を受けたときにその影響を受けて動く傾向を示す数値です。コンプライアンスが大きい（すなわち剛性が低い）ほど、構造物は加えられた力によって動きやすくなります。コンプライアンス曲線は、加えられた単位外力当たりの物体上の点の変位の振幅を、周波数の関数として示すもので、次式で示されます：

コンプライアンスの単位は変位を力で割ったもので、例えばmm/Nまたはin/lbです。

$$C = \frac{|x|}{|F|}$$

ここで：

C　コンプライアンス

|F|　加えた力

|x|　変位量

コンプライアンスの単位は変位を力で割ったもので、例えばmm/Nまたはインチ／ポンドです。

理想的な自由剛体のコンプライアンス

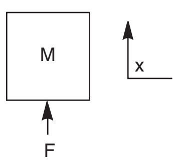

図1：理想的な自由剛体のモデル、Mx'=F

コンプライアンスの理論的なモデルは、理想的な自由剛体です。図1に示すように、質量Mの剛体に外力Fが作用したときに、何が起きるかを知る必要があります。単調和振動の力が加わったときの定常状態の解は次のようになります：

$$x = x_0 \sin(\omega t)$$

ここで　$x_0 = -\frac{F}{M\omega^2}$

このことは、物体が正弦関数に従って前後に運動し、その運動の振幅が入力の角周波数の二乗に反比例することを意味します。この例では、コンプライアンスCは振幅$|x_0|$を力の大きさ|F|で割っただけで、次式で表されます。

$$C = \frac{|x_0|}{|F_0|} = \frac{1}{M\omega^2}$$

従って剛体のコンプライアンスは1/ 2に比例し、両対数グラフにプロットすると傾きが-2の直線になります。この直線は理想剛体線と呼ばれ、理論的に完全な剛体のテーブルの動的特性を表します。

テーブルトップのコンプライアンス曲線

テーブルトップの動的な性能は通常、コンプライアンス曲線、つまりランダム振動に対するテーブルの動的応答を両対数グラフにプロットしたもので特徴づけられます。非剛体の場合は、コンプライアンス曲線構造物の共振周波数と、共振点での最大振幅を示します。コンプライアンス曲線とその他の情報を合わせれば、特定のシステムがある目的のためにどの様に機能するかに関する信頼できる推定を行うことができます。

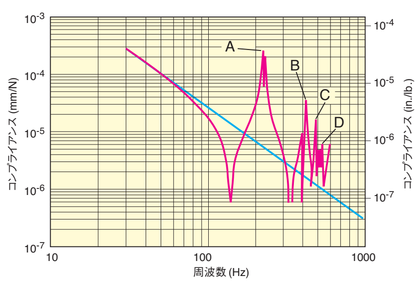

図2：減衰しないテーブルトップの代表的なコンプライアンス曲線

共振と最小周波数 (f_n)

図2と3は、減衰を行わないテーブルトップの振動モードとコンプライアンス曲線のピークとの関係を示すものです。AからDまでの符号が付けられたピークの各々が、振動の基本モードに対応します。図3は図2に示された周波数で起きる振動モードを図示したものです。

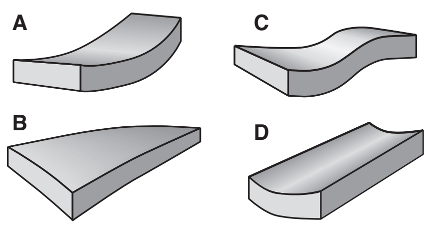

図3：図2のコンプライアンス曲線に対応する振動モード

振動に対するテーブルトップの応答は、周波数範囲に依存します。アルミニウム製ハニカムで構成されたテーブルトップのコンプライアンス曲線を図4に示します。周波数が低い範囲では、コンプライアンスは加えられる周波数（ω=2πf）の二乗に反比例して減少します。これは構造物が理想的な剛体として働くことを意味します。テーブルトップの構造的な減衰を動的たわみ係数を使って算出できるように、Newportが作成するコンプライアンス曲線には全て図4の直線（B）で示される理想剛体線が書き込まれています。

周波数が80Hzよりも高い範囲では、コンプライアンス曲線はこの直線から離れ始め、テーブルはもはや理想的な剛体とは見なされなくなります。約80Hzでは、構造的な振動モードが励起されてテーブルは変形を始めます。コンプライアンスの各ピーク（C,D, E, F, G）はテーブルの共振モード（約220, 290, 420, 496, 600 Hz）に対応します。

周波数が高くなると剛体のコンプライアンスは急速に小さくなるので、最大の変位は一般に低周波数での共振によって生じます。普通は左の方の最初のピークが最大の振幅を持ち、振動に対するテーブルの応答を支配します。例えば図4の例では、220 Hzが最小の共振周波数、つまりテーブルトップの固有振動数（f_n）です。最小の共振周波数は高いほど好ましいのですが、それは高い周波数ではテーブルの変位の振幅は非常に小さくなり、安定性が良くなるからです。

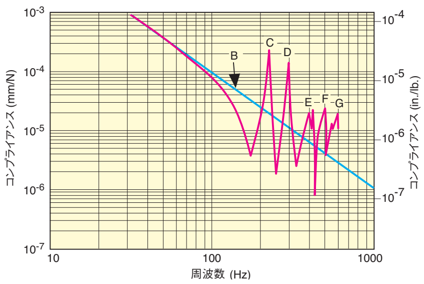

図4：アルミニウム製ハニカムコアを持つテーブルトップのコンプライアンス曲線

共振点での最大増幅度（Q値）

最高の安定性を実現する上で、テーブルトップの共振モードを減衰させることが決定的に重要です。テーブルトップの効果的な減衰はコンプライアンスを低下させる（共振のピーク高さを下げる）ことになります。そこで目標は、コンプライアンス曲線が理論的な理想剛体線からできるだけ離れないようなテーブルトップを設計することになります。理想剛体線を基準としない、つまりそれと比較できないコンプライアンスの絶対値は、テーブルトップの構造的な減衰を知る上でほとんど役に立ちません。

コンプライアンス曲線を一目見るだけで、減衰の程度を概略知ることができます。例えば図4と5を見れば、図5に示されたテーブルの減衰の方が優れていることが、直感的に分かります。しかしどの程度優れているのでしょうか？曲線を目で比較する場合、対数目盛のグラフは非常に目を欺きがちなものです。しかしテーブルトップの共振点での最大増幅度を求めれば、相対減衰効率を正確に比較することが容易にできます。

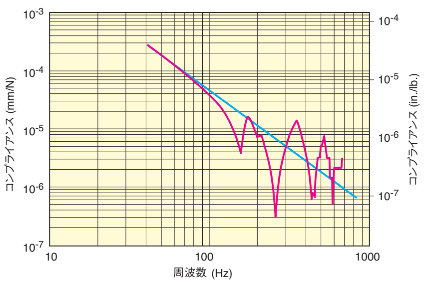

図5：スチール製ハニカムコアを持つテーブルトップのコンプライアンス曲線

共振点での最大増幅度すなわちQ値は、コンプライアンス曲線が理想剛体線からどれだけ離れるかを示す尺度です。これは厳密には、コンプライアンス曲線の最大のピーク（通常は左側の最初のピークですが、常にそうとは限りません）が理想剛体線よりもどれだけ大きいかを、同じ周波数での理想的な剛体の応答の大きさで割ったものです。図6を参考にして下さい。構造のQ値が低いほど減衰が良好で、構造はより安定となります。構造のQ値と対応する共振周波数を組み合わせると、構造の動的たわみ係数を求めることができます。

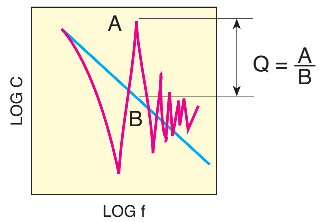

図6：共振点での最大増幅度（Q値）

Q値は任意のコンプライアンス曲線から簡単に計算できます。コンプライアンス曲線と一緒に理想剛体線が描かれていない場合は、それを描いて下さい。この直線はコンプライアンス曲線の「直線」部分に接しており、傾きは-2（周波数が10倍になるとコンプライアンスが100分の1に減少する）でなければいけません。理想剛体線の傾きが-2でないコンプライアンス曲線は問題がありますので、注意して下さい。

例

ハニカムコア構造のテーブルトップの共振点での最大増幅度（Q値）の算出方法を図4と5に示します。図4のアルミニウム製コアのテーブルに比べて、図5に示すスチール製コアのテーブルの方が約3倍も効果的に減衰することが分かります。比較のために、代表的なグラナイト製ブロックのQ値も示します（グラナイトのコンプライアンス曲線は示してありません）。

スチールハニカムコア	$Q=\dfrac{1.4\times10^{-5}}{3.9\times10^{-6}}\cong 4$
アルミニウムハニカムコア	$Q=\dfrac{2.2\times10^{-4}}{1.9\times10^{-5}}\cong 12$
グラナイトブロック	$Q=\dfrac{2.3\times10^{-4}}{5\times10^{-7}}\cong 460$