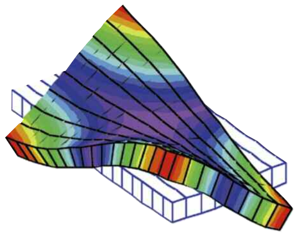
振動の基礎知識
Fundamentals of Vibration

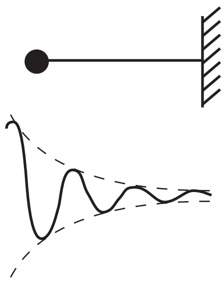


振動と除振は、どちらも共振および単調和振動に密接に関連しています。

単調和振動

調和振動の単純な例は、柔らかくしなう片持ち梁に取り付けられた質量の運動です。

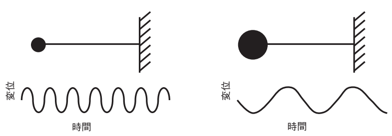
一発だけのインパルスであれ、振動のような周期的な力であれ、何らかの外力が加わると、バネがエネルギーの保存と運動する質量への移転を交互に行うことにより、システムが共振します。



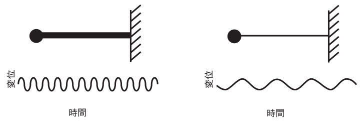
外力を受けて共振する片持ち梁上の質量

固有振動数

固有振動数は名前が示すように、システムが共振を起こす振動数(周波数)です。片持ち梁上と質量の例では、固有振動数は質量の大きさと、バネの役割を果たす梁の剛性の2つの要因によって決まります。質量が小さくなったり梁の剛性が高くなると固有振動数が上昇し、質量が大きくなったり梁の剛性が低くなると固有振動数が低下します。

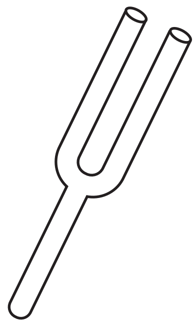


質量が小さいと固有振動数が高く（左）、質量が大きいと固有振動数が低くなります（右）。



バネの剛性が高いと固有振動数が高く（左）、バネが柔らかいと固有振動数が低くなります（右）。
固有振動数の別の単純な例は、特定の固有

振動数で振動するように作られた音叉です。例えばAの音叉は、440 Hzの周波数で振動します。片持ち梁の固有振動数がバネの剛性や質量が違えば変化するのと同じように、音叉の固有振動数も二股部分の質量や長さを増減することで変化させることができます。



音叉は、二股部分の質量と長さで決まる固有振動数で振動します。

減衰

片持ち梁と音叉のモデルでは減衰のないシステム、つまり振動のエネルギーを散逸させるメカニズムが存在しないシステムを考えました。減衰されない場合、これらのシステムは静止するまでに長い時間、少なくとも数秒間、振動を続けます。

減衰はシステムから振動のエネルギーを散逸させて、振動を速く弱らせます。例えば音叉の先を水に漬けると、振動は直ぐに弱くなります。同様に、振動している質量と梁のシステムに軽く指を触れると、やはり減衰作用で振動のエネルギーが急速に失われます。

モデル ：単振動調和振動子

単振動調和振動子は、図1に示すような理想的な線形バネに結合された剛体質量Mで構成されます。

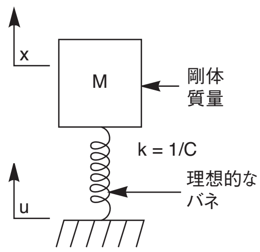


図1：下式で表される単振動調和振動子

$$M\ddot{x} = k\left(x - u\right) = 0$$

このバネは静的コンプライアンスCを持ち、力Fに対してバネの長さ変化Δxが$\Delta x = C\,F$で与えられます。

コンプライアンスCはバネ剛性（kで表す）の逆数で、k=1/Cとなることに注意して下さい。

バネと質量の系が周波数ωと最大振幅$|u|$を持つサイン波形の変位を受けると、質量Mは同じ周波数ωを持つ最大振幅$|x|$のサイン波形の変位をします。バネ先端の運動の振幅$|u|$に対する質量の運動の振幅$|x|$の定常状態での比は伝達率Tと呼ばれ、次式で与えられます。

$$T = \frac{|x|}{|u|} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^{\ 2}}}$$

ここでω_0はシステムの共振、すなわち固有振動数で次式で与えられます。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CM}}$$

システムの固有振動数ω_0は、質量とバネのコンプライアンスだけによって決まることに注意して下さい。質量が大きくてバネが柔らかいと、固有振動数は低下します。システムの伝達率Tはω/ω_0という比の関数としてプロットされます（図2では両対数グラフでプロットされています）。

テスト・解析・設計
光学テーブル
テーブルアクセサリー
ブレッドボード
除振脚
ワークステーション&除振プラットフォーム
ハニカム&グラナイト構造
振動の基礎知識

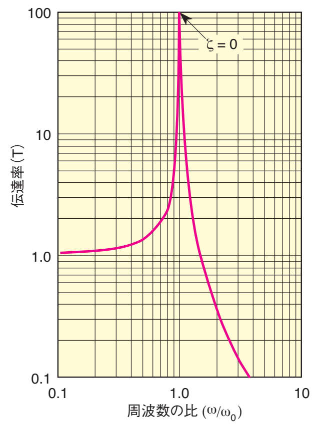


図2：単振動調和振動子の伝達率

このシステムには以下の3つの特徴があります。

1) 周波数ωが共振周波数ω_0よりもはるかに低い場合、伝達率T=1で、質量の運動はバネの反対側の運動と同じです。

2) 周波数ωが共振周波数ω_0とほぼ同じの場合、バネの反対側の運動は増幅され、質量の振幅|x|はuよりも大きくなります。減衰されないシステムで$\omega = \omega_0$の場合、質量の運動は理論的には無限大になります。

3) 周波数ωが共振周波数ω_0よりもはるかに高い場合、変位|x|は$1/\omega^2$に比例して減少します。この場合、システムに加えられる変位|u|は質量に伝達されません。言い換えれば、バネはダンパーとして作用します。

モデル ：
減衰された単振動調和振動子

最初のモデルでは減衰のないシステムを考え、その場合は質量とバネの系からの振動エネルギーを散逸させるメカニズムは存在しません。減衰とは、システムから振動エネルギー（多くの場合、熱）を奪うメカニズムを言います。減衰された単振動調和振動子を図3に模式的に示します。

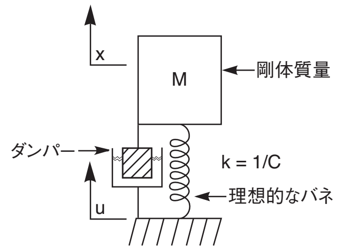


図3：下式で表される減衰された単振動調和振動子

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + k(x-u) = 0$$

剛性結合されたダンパーは、運動を記述する微分方程式に、質量の速度に比例する減衰項をつけ加えることで、数学的に表されます。モデルIIにおけるバネの端の変位の振幅|u|を生じさせる外力に対して、減衰されるシステムの伝達率Tは次式で与えられます。

$$T = \frac{|x|}{|u|} = \sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

ここでζは次式で与えられる減衰係数です。

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{\frac{M}{C}}}$$

図4は、減衰係数ζの様々な値に対する伝達率Tの値を示すグラフです。ζがゼロに近づいた極限では、この曲線はモデル の場合と全く同じになります。つまり、共振周波数ω_0では増幅率が無限大となります。減衰が強くなると、共振点での振幅が減少します。ただし高周波数でのロールオフは低下します（つまり、減衰が強くなると伝達率の低下が緩慢になります）。ω/ω_0 が1/ζよりもはるかに大きい運動|x| は1/ に比例し、モデル の場合に周波数が高くなると変位|x|が1/ω2.に比例して減少するのと異なります。

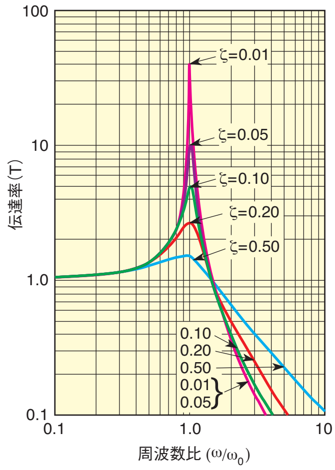


図4：減衰係数（ζ）の様々な値に対する減衰された振動系の伝達率