2回積分をすると角変位が得られる。

$$\theta(t) = -\frac{F_0 \ell}{2I\omega^2}\sin(\omega t)$$

小さな直線方向の変位についてはr sin θ = r θが成り立ちますから、

$$x_{ROT}(t) = \frac{\ell}{2}\theta(t) = -\frac{F_0 \ell^2}{4I\omega^2}\sin(\omega t)$$

ここで棒状の剛体の慣性モーメントIを求めます。

$$I \cong \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \rho \bullet r^2 dr \quad \text{（ここで } \rho = \frac{M}{\ell} \text{ は各長さ毎の質量）}$$

$$= \frac{M}{\ell}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \frac{1}{3}\frac{M\ell^2}{4}$$

従って剛体の運動の回転成分（トルク）は以下のように求まります。

$$x_{ROT}(t) = -\frac{F_0 \ell^2}{4\omega^2} \bullet \frac{3 \bullet 4}{M\ell^2}\sin(\omega t)$$

$$= -\frac{3F_0}{M\omega^2}\sin(\omega t)$$

重心の変位と剛体変位の合成

図3に示したように力を加えて変位を測定すると、重心（CM）と剛体の回転（ROT）変位は互いに加算的となります。

$$x_{TOTAL}(t) = x_{CM}(t) + x_{ROT}(t)$$

$$= -\frac{F_0}{M\omega^2}\sin(\omega t) - 3\frac{F_0}{M\omega^2}\sin(\omega t)$$

$$= -4\frac{F_0}{M\omega^2}\sin(\omega t)$$

従って、図3に示したようにテーブルの端に力を加えて、同じ位置で応答を測定したときの全コンプライアンスは次式で与えられます。

$$C_{TOTAL} = \frac{|x_{TOT}|}{|F|} = \frac{4}{M\omega^2}$$

これは、単純化した（力を中心に加える）モデルで予測したコンプライアンスのちょうど4倍になります。もしも力をテーブルの隅に加えれば、剛体のプレートに対する同様の計算で次の結果が得られます。

$$C_{TOTAL} = \frac{7}{M\omega^2}$$

これらの公式で理想剛体線を近似すると、その結果は実験的に得たコンプライアンス曲線における理想剛体線と良い相関を示します。

光学テーブルの性能仕様

About Optical Table Performance Specifications

動的たわみ係数と相対運動：最も有益なテーブルトップ仕様

テーブルトップの動的な剛性（振動によるテーブル表面の移動に対する抵抗）は、振動制御に関する最も重要な指標です。しかし動的な剛性を評価する古典的な方法であるコンプライアンス曲線は、テーブルトップの振動制御能力の数量的評価を行うという面では十分ではありません。

任意のコンプライアンス曲線から導かれる性能指標である動的たわみ係数を使えば、動的な性能を直接比較することができ、また特定の用途に対して適切なレベルのテーブル安定性を選定できます。環境振動のレベルが分かっている場合、動的たわみ係数は相対運動の値を計算するために利用することもでき、そして相対運動の値は、特定の用途に最も適したテーブルの選定に利用できます。

Newportのテーブルトップの比較をしやすいように、全てのフルサイズのテーブルおよびブレッドボードについて、典型的な実験室環境での動的たわみ係数と相対運動の値が示されています。

振動に対するテーブルトップの動的応答

テーブルトップは無数の互いに異なる振動の影響を受けますが、それらの振動を合わせると、ランダム振動に非常に近いものになります。ランダム振動によってテーブルに生じる加速度は次式で与えられます。

(1)

$$G_{rms} = \left[\frac{\pi}{2} f_n Q(PSD)\right]^{\frac{1}{2}}$$

ここで

G_{rms}は応答加速度の二乗平均根

f_nはテーブルの対応する共振周波数（Hz）

Q は共振点での最大増幅度で、減衰効率を表す量（無次元量）

PSDは加えられる振動のパワースペクトル密度 (g^2/Hz)

テーブルトップの応答の相対変位は次式で与えられます。

(2)

$$\delta = \frac{G_{rms}\,g}{(2\pi f_n)^2}$$

ここで

δは応答としての変位

gは重力加速度式

（1）と（2）を組み合わせると以下のように、ランダム振動に対するテーブルトップの変位が得られます。

(3)

$$\delta = \frac{g}{(2\pi f_n)^2}\left[\frac{\pi}{2} f_n Q(PSD)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta = \left(\frac{1}{32\pi^3}\right)^{\frac{1}{2}} g \left(\frac{Q}{f_n^{\,3}}\right)^{\frac{1}{2}} (PSD)^{\frac{1}{2}}$$

相対運動の公式

図1に示す相対運動の公式の基礎となる式（3）を使えば、固有振動数（f_n）でのテーブル上の2点間での最悪の場合における相対運動を計算できます。計算結果は、干渉計による方法で得られる性能の測定値と良く一致します。ユーザーの便宜のために、Newportでは全てのテーブルとブレッドボードについて算出された相対運動の値も提供しますが、このデータは典型的な一般実験室環境下での性能を正確に反映するものです。

相対運動式の2番目の項$(Q/f_n^3)^{1/2}$は、テーブルトップの最小共振周波数と減衰効率から導かれる性能指標である動的たわみ係数であり、テーブルトップの動的な性能を数量的に表します。3番目の項、$(PSD)^{1/2}$は加えられた振動の強度レベルの寄与度を示すもので、テーブルを使用して直接測定するかまたは推定することができます（ランダム振動を仮定）。4番目の項であるダンパーの伝達率は、支持構造を通って伝達される問題の周波数範囲での基礎振動の減衰を示すものです。

この公式は相対運動の最悪の場合における推定値であり、普通の装置でぶつかる実際の相対運動はもっと小さいはずであることに注意して下さい。一方、加えられる振動に特定の周波数の鋭いピークが含まれる（つまりランダムでない振動）場合は、実際の相対運動はかなり高くなるでしょう。

例

寸法4×8フィート、厚み12インチ（1200 × 2400 × 305 mm）のRS2000TMテーブルトップを道路に近い実験室設置した場合に、その表面上の2点間の最悪ケースにおける（つまり最大の）相対運動の値を計算します。コンプライアンス曲線については、P1042を参照して下さい。

まず最初に、最大動的たわみ係数を求めます。

以下の共振点のピークについて：

f_n Å 190 Hz, Q ≈ 2.7, $(Q/f_n^3)^{1/2}$ Å 0.6 x 10^{-3}.

以下の共振点のピークについて：

f_n Å 270 Hz, Q ≈ 22, $(Q/f_n^3)^{1/2}$ Å 1.1 x 10^{-3}.

と仮定すれば、

g = 386 in./sec²

PSD = 10^{-9} g²/Hz

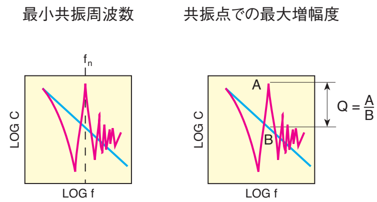
T <0.01（対象とする典型的な周波数範囲において）

相対運動は以下のように求められます。

$$RM = \left(\frac{1}{32\pi^3}\right)^{\frac{1}{2}} \Sigma 386 \Sigma \left(1.1 \Sigma 10^{-3}\right) \Sigma \left(10^{-9}\right)^{\frac{1}{2}} \Sigma 0.01 \Sigma 2$$

$$RM \cong 0.85 \Sigma 10^{-8} \text{ inches, or}$$

$$RM \cong 0.2 \text{ nm.}$$



典型的なPSD値*

比較的静寂な実験室	<10^{-10} g²/Hz
道路に面した実験室	<10^{-9} g²/Hz
小さな工場	<10^{-8} g²/Hz

*実際の環境に存在するランダム振動を仮定

$$f_n\text{における最大相対運動} = g\left[\frac{1}{32\pi^3}\right]^{\frac{1}{2}} \bullet \left[\frac{Q}{f_n^3}\right]^{\frac{1}{2}} \bullet \left(PSD\right)^{\frac{1}{2}} \bullet T \bullet 2$$

定数項 [g = 386 in/sec² (9.8 m/sec²)]　動的たわみ係数　床の振動レベル (g²/Hz)　除振脚の伝達率（通常、10Hz以上で<0.01）　最悪ケースにおける2点間の運動に対する乗数

図1：除振されたテーブルトップ上の2点間の最大相対運動を、コンプライアンス曲線から算出する公式。剛性の高いスタンド（又は脚）で支持されたテーブルトップの場合、相対運動はもっと大きくなります。

所定の荷重下でのたわみ

テーブルトップの動的剛性の次ぎに重要な性能は、静的剛性です。静的剛性は、剛性（曲げ強さ）の直感的な印象に対応するもので、静的なたわみで表されます。静的たわみは、テーブルトップの上に静的荷重をかけたときに、支点の間でテーブルトップが下がる距離です。

たわみが小さいと言うことは、テーブル上の各部品相互の良好な配置と結合が維持されるということ、特に重い荷重をテーブルに載せたり移動したりしても維持されるということです。静的剛性はまた、周波数の低い振動に対するテーブルの動的な応答に関しても重要な要素です。

ここに示した公式を使えば、任意の点荷重に対するテーブルの中央におけるたわみを予測できます。比較のためにNewportでは、全てのフルサイズのテーブルおよびブレッドボードについて、荷重250ポンド（114キロ）に対するたわみのデータを示しています。

推奨位置（テーブルの端から22%の場所）でダンパーによって支持され、その中間点に点荷重をかけたテーブルの場合、テーブルの中央での下向きのたわみ（図2）は次式で与えられます。

$$\text{静的たわみ} = \frac{PL^3}{24\,EbTH^2} + \frac{PL}{4\,GHb}$$

ここで

P = 点荷重が及ぼす力

L = 除振脚の間隔の長さ（テーブル長さの0.56倍）

b = テーブルの幅

H = テーブルの厚み

T = 表面板の高さ

E = 表面板材料のヤング率

G = コアのせん断率

公式の最初の項は曲げの影響を表すもので、表面板の特性によってほぼ決まります。2番目の項はせん断の影響を表し、主にコアの特性に依存します。

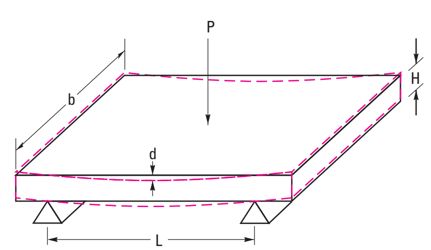


図2：ダンパーの推奨設置位置で支持されたパネルの中央に点荷重Pを加えたときの静的たわみ

テーブルやブレッドボードの材料の特性値は該当する章で示してありますが、ヤング率は次頁の表に示します。

表面板材料のヤング率

炭素鋼	29.0 x 10^6 psi (200 GPa)
ステンレススチール	29.0 x 10^6 psi (200 GPa)
スーパーインバー6061-T6	21.5 x 10^6 psi (148 GPa)
アルミニウム	9.9 x 10^6 psi (69 GPa)
グラナイト	7.0 x 10^6 psi (48 GPa)

例

寸法4×8フィート、厚さ12インチ（1200 × 2400 × 305 mm）のRS4000テーブルトップに250ポンドの荷重をかけたときの静的たわみ（SD）は以下のように計算されます。

P = 250 lb

L = 52 in. span

E = 29,000,000 psi

b = 48 in.

T = 0.1875 in.

H = 12 in.

G = 225,000 psi

$$SD = \frac{(250)(52)^3}{(24)(29\times10^6)(48)(.1875)(12^2)} + \frac{(250)(52)}{(4)(225{,}000)(12)(48)}$$

$$= 3.90\times10^{-5} + 2.51\times10^{-5}$$

$$SD = 6.41\times10^{-5} \text{ inches}$$

ハニカム構造は、なぜ固体構造よりもたわみが小さいか

Why Honeycomb Structures Deflect Less Than Solid Structures

サンドイッチ構造の除振テーブルは、同じ重量を持つ固体構造（むく）のテーブルよりも高い剛性を示します。重量が同じであれば、サンドイッチ構造のテーブルの方が固体構造のテーブルよりも高い基本周波数を持ちます。サンドイッチ構造のテーブルの曲げ挙動は複雑ですが、以下に述べる単純な近似が用いられます。

自重だけが作用する除振テーブルの基本周波数は次式で与えられます：

$$f \cong \frac{C}{2\pi}\left(\frac{g}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで

fは基本周波数（Hz）

δは自重によるたわみ

gは重力加速度

Cはテーブルの形状によって1.13から1.26の範囲にある定数*

4隅で支持された長方形テーブルの自重によるたわみは、次式で与えられます：

$$\delta \cong \frac{1}{144} e^{1.267\left(\frac{b}{L}\right)} \frac{P}{D} L^4$$

ここで

δは自重によるたわみ

Pはテーブルの単位面積当たりの重量

Lはテーブルの長さ

bはテーブルの幅

Dはテーブルの静的曲げ剛性

固体構造のテーブルの静的曲げ剛性は、次式で与えられます：

$$D_{SOLID} = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$$

ここで

D_{SOLID}は固体構造のテーブルの静的曲げ剛性

Eは固体材料の弾性係数

hはテーブルの厚み

υは固体材料のポアソン比

サンドイッチ構造のテーブルの場合、曲げ剛性は次式で近似されます。

$$D_{SANDWICH} \cong \frac{Et_F h^2}{2(1-\upsilon^2)}$$

ここで

$D_{SANDWICH}$はサンドイッチ構造のテーブルの曲げ剛性

Eはサンドイッチ構造の表面板の弾性係数

t_Fはサンドイッチ構造の表面板の厚み

hはテーブルの厚み

（上式は、上部及び下部の表面板の厚みが同じであり、コアのせん断剛性が無視できると仮定しています。）

たわみと静的曲げ剛性の公式を使えば、同じ厚みのサンドイッチ構造と固体構造のテーブルの間におけるたわみの比が次のように与えられます。

$$\frac{\delta_{SANDWICH}}{\delta_{SOLID}} = \left[\frac{P_{SANDWICH}}{\rho\times h}\right]\left[\frac{D_{SOLID}}{D_{SANDWICH}}\right]$$