4) レーザーダイオードビームの拡散角は大きいため、ビーム幅が各レンズの有効開口よりも大きくならないように注意する必要があります。各レンズは、レーザーダイオードから焦点距離だけ離れた位置に置かれているため、各レンズ位置におけるビームの最大幅（d_1およびd_2）は、次の式で求めることができます。

$d_1 = 2f_1(\tan(\theta_2/2))$,
and $d_2 = 2f_2(\tan(\theta_1/2))$

この例に最も適したレンズはNewport CKX012（f_1 = 12.7mm、BFL_1 = 7.49mm）とCKX050（f_2 = 50.2mm、BFL_2 =46.03mm）です。他の要素を考慮に入れなければ、レンズ平面間の距離はBFL_2 -BFL_1 = 38.54mmです。最初のレンズにおけるビーム直径は、次の式で求められます。

$d_1 = 2(12.7\ \text{mm})\tan(20°) = 9.2$ mm.

2つめのレンズにおけるビーム直径は、

$d_2 = 2(50.2\ \text{mm})\tan(5°) = 8.8$ mm,

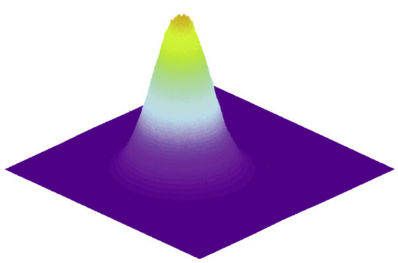
わずかに非対称形状とはなるものの、標準レンズの簡単な組み合わせによって、大幅な改善を得ることができます。

ガウシアンビーム光学

Gaussian Beam Optics

ガウシアン分布は半径方向に対称な分布で、その電界変化は次の式で表わされます。

$$E_S = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right)$$



Rはビーム中心からの距離として定義されます。ω_0は、軸上の頂点の1/eとなるところの半径です。

このフーリエ変換もやはりガウシアン分布になります。フラウンホーファー近似を使用せずにフレネル積分を直接解こうとすると、ガウシアン光源の分布は、光学系の伝播光路上ではどの点においてもガウシアン分布となります。これにより、光学系の任意の点における電界分布を特に簡単に表わすことができます。光の強度もやはりガウシアン分布になります。

$$I_S = \eta E_S E_S^* = \eta E_0 E_0^* \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right)$$

*Denotes complex conjugate

現在ではガウシアン強度分布を持つ光源、すなわちレーザーは身近なものとなったため、この関係は単なる数学的興味以上の意味を持っています。ほとんどのレーザー波動における電界は、本来ガウシアン分布です。また、基本ガウシアン分布には特殊な多項式乗算が適用されることもありますが、その場合でも変換結果はガウシアン分布のままです。これらの電界分布は高次横モードと呼ばれ、ほとんどのレーザーにおいては、設計によって回避するのが普通です。

ガウシアンビームには、開口直径などのように、特性に影響する寸法について明確な境界はありませんので、ガウシアンビームのサイズはある程度任意に決定することができます。図1は典型的なHeNeレーザーのガウシアン強度分布を示したものです。

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right)$$

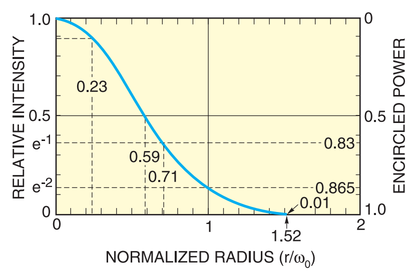


図1

パラメータω_0は通常ガウシアンビーム半径と呼ばれ、強度が軸上における値、すなわちピーク値の$1/e^2$または0.135まで減少する半径を表わします。留意すべきもう1つの点は、最大強度の半分、すなわち強度が50%となるのが$0.59\omega_0$の位置であるということです。$2\omega_0$、すなわちガウシアン半径の2倍の位置における強度はピーク値の0.0003となり、通常はほとんど無視することができます。

半径r以内に包含される出力P(r)は、0からrまでの強度分布を積分することによって簡単に求めることができます。

$$P(r) = P(\infty)\left[1 - \exp\left(\frac{-2r^2}{\omega_0^2}\right)\right]$$

ワット数で表わしたビームの全出力P(∞)に対してこれを正規化すると、強度曲線と同じ曲線が求められますが、縦軸の方向は逆になります。半径$r = 2\omega_0$.の中には、ほとんど100%の出力が包含され、$0.59\omega_0$内には50%、強度が10%低下する$0.23\omega_0$内ではわずか10%になります。ビームの全出力P(∞)ワットは、中心軸上の強度I(0) (watts/m²)の関数となり、次の式で求められます。

$$P(\infty) = \left(\frac{\pi\omega_0^2}{2}\right) I(0)$$

$$I(0) = P(\infty)\left(\frac{2}{\pi\omega_0^2}\right)$$

軸上ではビーム面積が小さいため、強度は非常に高くなります。

ビームを非常に小さい開口でカットオフする場合は注意が必要です。この場合、光の分布はガウシアン分布とならず、中心軸から離れた部分の強度分布はゼロとなり、他の非ガウシアン特性が見られるようになります。しかし、開口直径が 0の少なくとも3倍ないし4倍あれば、これらの影響は無視することができます。光学系におけるガウシアンビームの伝播は、幾何光学とほぼ同じように単純に扱うことができます。

ガウシアンビームはすでにフーリエ変換の特性を備えているため、距離によって強度分布がどのように変化するかについて積分を行う必要はありません。横方向の分布強度は光学系のどの位置においてもガウシアン分布となり、ガウシアン半径と波面の曲率半径だけが変化します。今、x=0における波面が平坦なガウシアン分布のコヒーレント光ビームを考えます。ビームサイズと波面の曲率は、xに伴って図2に示すように変化します。

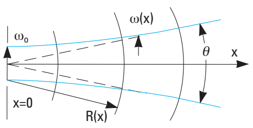


図2

ビームサイズは、最初ゆっくりと、そして次第に大きく変化し、最終的にはxに比例して増加します。x=0では無限大だった波面の曲率半径は有限な値となり、最初はxと共に減少します。曲率半径はある点において最小となりますが、その後はxと共に増加し、最終的にはxに比例して増加します。ガウシアンビームの半径ω(x)と波面曲率半径R(x)は、次の式で求められます。

$$\omega^2(x) = \omega_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda x}{\pi\omega_0^2}\right)^2\right]$$

$$R(x) = x\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda x}\right)^2\right]$$

ここでω_0はx=0におけるビーム半径で、λは波長です。全体としてのビームの特性はこれら2つのパラメータによって決まりますが、これらのパラメータはどちらの式にも同じ組み合わせで含まれているため、レイリー距離という単一のパラメータxRとして表わされることがあります。

$$x_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$$

実際、Rの値は$x = x_R$において最小となります。これらの式は、xの値が負の場合にも成り立ちます。

先の例ではビーム光源がx=0の位置にある場合だけを考えましたが、x<0のある位置において負の波面曲率を持つ、より大きなガウシアンビームから同じビームを生成することができます。これは、図3に示すようにレンズを使用すれば簡単に実現することができます。

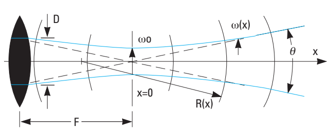


図3

レンズへの入力は直径Dガウシアンビームで、ビームウェストであるx=0の位置から-xだけ離してレンズを置いた場合、レンズ通過後の波面曲率半径は、上記の式に示すR(x)となります。その入力ガウシアンビーム自体にも、決まったビームウェストとサイズ（またはレイリー距離）があります。したがって、複雑な光学系であっても、それを通過するガウシアンビームの一般的な伝播の法則を求めることができます。

レンズ間の空間においては、ミラーその他の光学要素、ビームウェストの位置、およびウェスト直径（またはレイリー距離）によって、そのビームを完全に記述することができます。ビームが、レンズ、ミラー、または誘電体の境界面を通過する場合、その直径は変化しませんが波面の曲率半径が変化し、その結果、境界面の出力側におけるウェスト位置とウェスト直径の値も変化します。

これらの式に とRの値を入力すれば、あらゆる光学系におけるガウシアンビームの追跡が可能になりますが、一定の制約が伴います。まず、光学表面は球面で、ビーム直径があまり急激に変化しないように焦点距離がある程度の長さを持っていることが求められます。この制約は、幾何的な光線伝播を単純化するために使われる近軸近似における制約と全く同じものです。以上から、これらの法則を幾何光学追跡におけるABCD行列同様の便利な形態に変換できることが分かります。しかし、ω(x)とR(x)は、光線追跡におけるrおよびuのように行列形態に変換することはできず、複雑な双一次変換を行わなければならないという違いがあります。

$$q_{out} = \frac{\left[q_{in}A + B\right]}{\left[q_{in}C + D\right]}$$

ここでqは、次式に示すようにωとRが複雑に組み合わされた量です。

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{R(x)} - \frac{j\lambda}{\pi\omega(x)^2}$$

このqの式から、ビームウェスト位置（R = ∞、$\omega = \omega_0$）におけるqは純虚数となり、jxRに等しいことが分かります。1つのビームウェストの位置とそのサイズが分かれば、その位置におけるqが計算でき、さらにABCDを使用した双一次変換によってあらゆる位置におけるqを求めることができます。光学系の任意の位置におけるビームのサイズと波面曲率を求めるには、システム内の各要素に対するABCDの値を用い、これらの値を通じて継続的に双一次変換を行うことによってqの値を追跡します。しかし、qの全体的な変換値だけを求めるのであれば、幾何光学の場合と同じように要素としてのABCDの値を行列形式で乗じてシステム全体としてのABCDの値を求め、これに対して双一次変換を行います。ガウシアンビームの詳細については、Anthony E. Siegmanの「Lasers」（University Science Books, 1986）を参照してください。

幸いほとんどの光学系におけるスポットサイズと焦点深度については、ピンホール直径、ファイバへのカップリング、またはレーザー強度の計算などにあたって、簡単な近似を使用することができます。完全なガウシアンの公式が必要になるのは、Fナンバーが大きい場合に限られます。

ビームウェストから充分離れた位置におけるビームは、ウェストの中心に置かれた点光源からの球面波として発散します。「充分離れた」距離とはxÈx_Rであることを意味し、ほとんどのレーザービームは面積が小さいことを考えると、これは極めて満足しやすい条件であると言えます。発散ビームの発散角は （全角）です（この場合も1/e²の点によって決められます）。

$$\theta = \frac{4\lambda}{2\pi\omega_0}$$

角度が小さい場合は、tanθ Å θと近似することができます。原点は点光源として近似できますので、θは、幾何光学を使用し、レンズ上のビームが当たっている部分の直径Dをレンズの焦点距離で除して求めることができます。

$$\theta \approx \frac{D}{F} = (f/\#)^{-1}$$

ここで、f/#はレンズのFナンバーです。

これら2つの式を等式として1つにまとめることにより、入力ビームのパラメータからビームウェストの直径を求めることができます（ただし後述するように若干の制約を伴います）。

$$2w_0 = \left(\frac{4\lambda}{\pi}\right)\left(\frac{F}{D}\right)$$

また、上の式から焦点深度を求めることもできます。焦点深度の定義にはあいまいな点もありますが、これを、ビームウェスト径の位置からビーム径がそのÃ2 倍になる位置までのx方向の距離として定義すると、ω(x)の式を使って焦点深度を求めることができます。

$$DOF = \left(\frac{8\lambda}{\pi}\right)\left(\frac{F}{D}\right)^2$$

これらの関係を用いて、ガウシアンビームを使用する光学系について簡単な計算を行うことができます。たとえば、ビームの直径が1 mmのヘリウム-ネオン·レーザー（632.8 nm）のコリメート出力に対して焦点距離10mmのレンズを使用する場合を考えます。焦点スポットの直径は次の式で求められます。

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)(632.8\ \text{nm})\left(\frac{10\ \text{mm}}{1\ \text{mm}}\right),$$

すなわち、約8 μmとなります。次に、このビームの焦点深度は次の式で求められます。

$$\left(\frac{8}{\pi}\right)(632{,}8\ \text{nm})\left(\frac{10\ \text{mm}}{1\ \text{mm}}\right)^2,$$

すなわち、約160 μmです。この例におけるレンズの焦点距離を100 mmに変更すると、焦点スポットの直径は10倍の80 μm、つまりオリジナルビーム直径の8 %となります。また、焦点深度は100倍の16 mmとなります。しかし、レンズの焦点距離を2,000 mmまで大きくした場合を考えてみましょう。この簡単な式によって得られる「焦点スポットのサイズ」は200倍、つまり1.6 mmとなり、オリジナルのビーム直径よりも60 %大きくなってしまいます。これは、あきらかに何かに誤りがあることを示しています。問題は、ω(x)とR(x)を求める式ではなく、レンズからビームウェストまでの距離が焦点距離に等しいと仮定したことにあります。屈折率の小さい光学系においては、ビームウェストまでの距離と焦点距離は一致しません。実際、ビームウェストの位置は、幾何光学によって予想される結果とは逆に変化します。すなわち、焦点距離が長くなるほど、ビームウェスト位置はレンズに近くなります。しかし、コリメーティングされたビームのウェスト位置に平坦なガラスのような無限の焦点距離を持つレンズを置いた場合、それによって生じる新しいウェストは無限遠ではなくそのガラスの位置になることを考えれば、このようなケースにも限界があることは容易に想像がつきます。